Süleyman Demirel Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi
Y. 1997, S. 2(Güz) s. 95-108.

PRİMAL-DUAL DOĞRUSAL PROGRAMLAMA MODELLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Yrd. Doç. Dr. Abdullah EROĞLU*
Yrd. Doç. Dr. İbrahim GÜNGÖR**

Özet

Her bir doğrusal programlama modelinin (primal model) bir dual modeli mevcuttur. Dual model primal modelden bazı kurallar yardımıyla oluşturulmaktadır. Her iki model arasında sıkı ilişkiler mevcuttur. Söz konusu ilişkiler simpleks algoritmanın mantığını kavrama açısından önemlidir. Bu çalışmada primal - dual dönüşümleri, ilişkileri, dual değişken ve kısıtların ekonomik yorumları üzerinde durulmuştur.

Giriş

Doğrusal Programlama, doğrusal fonksiyonlara sahip bir matematiksel modelden en iyi sonucu elde etmek için faaliyetlerin planlanmasını içeren bir tekniktir.[1] Sözü edilen matematiksel modele doğrusal programlama modeli veya primal (asıl, birincil) model denir. Genel olarak primal model aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\text{Maks.(Min.)} \quad z = \sum_{J=1}^{n} c_J x_J \longrightarrow \text{Amaç Fonksiyonu}$$

$$\text{Kısıtlar} \longrightarrow \sum_{J=1}^{n} a_{iJ}\, x_J \quad \{\geq,\ =,\ \leq\}\ b_i\ , \quad (i = 1,2,...,m)$$

$$\text{Pozitif Kısıtlar} \longrightarrow x_J \geq 0 \qquad , \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

---

* Süleyman Demirel Üniversitesi İ.İ.B.F. İşletme Bölümü Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı.
** Süleyman Demirel Üniversitesi İ.İ.B.F. İşletme Bölümü Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı.

1 HILLIER F.S., LIEBERMAN, G.J., **Introduction to Operations Research**, Fourth Edition, Holden - Day, Inc. California, 1989, s. 30.

Her primal modelin bir dual (ikil, ikincil) modeli vardır. Dual model; primal modelin bir başka açıdan ifadesi olarak tanımlanabilir ve her iki modelin optimum çözüm değerleri aynıdır. Primal model ile dual model arasında çok sıkı ilişkiler vardır. Bir modelin en iyi çözümünden öteki modelin en iyi çözümü hakkında tam bir bilgi sağlanır.[2] Dual modelin çözüm değerleri problem hakkında önemli ekonomik yorumlar getirir.

1. Kullanılan Kavramlar

Standart Biçim: Bir doğrusal programlama probleminin tüm kısıtlarının eşitlik halinde, sağ taraflarının ve tüm değişkenlerin 0 ve/veya pozitif (nonnegative) olduğu durum.

Temel Çözüm (Basic Solution): Cebirsel olarak m tane değişkenden (kısıt sayısı kadar) oluşan (geriye kalan tüm değişkenleri sıfıra eşitlemek suretiyle) birik (unique) çözümdür.[3]

Olurlu Temel Çözüm: Eğer bir temel çözüm pozitif kısıtlamaları sağlıyorsa buna olurlu temel çözüm denir. Bir başka ifadeyle tüm kısıtları ve pozitif kısıtlamayı sağlayan çözümdür.[4]

Temel Olmayan Değişkenler: Çözüm değeri sıfır olan değişkenlerdir. Bir diğer deyişle temel çözümde yer almayan değişkenlerdir.

Temel Değişkenler: Temel çözümde yer alan değişkenlerdir.

İterasyon: Her bir temel çözümün elde edildiği aşama. Problem Simpleks metotla her bir iterasyonda olurlu temel çözümlerle optimal çözüme ulaşır.

Asal Değişkenler (xJ, yi): Primal ve dual modelin standart biçime getirilmeden önceki ihtiva ettiği değişkenler.

Aylak Değişken (Slack Variable: si): $\leq$ biçimindeki bir kısıtı eşitlik haline getirmek için kısıtın sol tarafına eklenen değişken. Başlangıç temel değişkenidir. Kullanılmayan kaynak miktarını ifade eder. Optimal çözümde yer alabilir ve amaç fonksiyonu katsayısı sıfırdır.

Artık Değişken (Surplus Variable: si): $\geq$ biçimindeki bir kısıtı eşitlik haline getirmek için, kısıtın sol tarafından çıkarılır. Minimum kullanılması gereken kaynak miktarından ne kadar fazla kaynak kullanıldığını gösterir. Başlangıç temel değişkeni değildir. Optimal çözümde yer alabilir ve amaç fonksiyonu katsayısı sıfırdır.

---

[2] ÖZDEN Kenan, "Primal ve Dual Eniyi Çözüm Kümeleri Dönüşümüne Bir Ekleme", **D.E.Ü.İ.İ.B.F. Dergisi**, Çilt.5, Sayı.1-2, İzmir, 1990, s. 173.

[3] TAHA Hamdy A., **Operations Research**, Macmillan Publishing Company, Fourth Edition, New York, 1987, s. 69.

[4] TAHA, s. 69.

Yapay (Suni) Değişken (Artificial Variable: Ri): $\geq$ ve $=$ biçimindeki kısıtların sol tarafına eklenen bir değişkendir. Başlangıç temel çözümünü oluşturmak için kullanılır. Dolayısıyla başlangıç temel değişkenidir. Amaç fonksiyonu katsayısı; minimizasyon amaçlı problemde M, maksimizasyon amaçlı problemde ise -M'dir. Optimal çözümde yer almaz. Yer alırsa problem çözümsüzdür.

Başlangıç Temel Çözümü: Başlangıç iterasyonunda oluşturulan temel çözüm.

Başlangıç Temel Değişkenleri: Başlangıç temel çözümünü oluşturan değişkenler (Aylak ve/veya yapay değişkenlerden oluşur.).

Ters Matris: Herhangi bir iterasyonda ters matris; başlangıç temel değişkenlerinin ilgili iterasyondaki kısıtlayıcı katsayıları matrisi.

2. Primal-Dual Dönüşümü İle İlgili Kurallar

1) Bir primal problem maksimizasyon (minimizasyon) amaçlı ise ilgili dual problem minimizasyon (maksimizasyon) amaçlıdır.

2) Her bir primal kısıt için bir dual değişken ve her bir primal değişken için bir dual kısıt mevcuttur. (Bu kural n değişkenli, m kısıtlı bir primal problem için ilgili dual problemin m değişken ve n kısıta sahip olduğunu gösterir.)

3) Primal problemin amaç fonksiyonu katsayıları (c_J ; j = 1,2,...,n) ilgili dual problemin sağ taraf sabitlerini, sağ taraf sabitleri (b_i ; i = 1,2,...,m) ise ilgili dual problemin amaç fonksiyonu katsayılarını oluşturur.

4) Primal problemin kısıt katsayıları matrisin transpozu ilgili dual problemin kısıt katsayıları matrisidir.

5) Maksimizasyon (minimizasyon) amaçlı bir primal problemin i. kısıtı için ilgili dual değişken (y_i) ; i. kısıt $\leq$ biçiminde ise $y_i \geq (\leq) 0$, i. kısıt $=$ biçiminde ise y_i - kısıtsız ve i. kısıt $\geq$ biçiminde ise $y_i \leq (\geq) 0$ olur.

6) Maksimizasyon (minimizasyon) amaçlı bir primal problemin j. değişkeni (x_J) için ilgili dual kısıt; $x_J \geq 0$ ise dual kısıt $\geq$ ($\leq$) biçiminde, x_J - kısıtsız ise dual kısıt $=$ biçiminde ve $x_J \leq 0$ ise dual kısıt $\leq$ ($\geq$) biçiminde olur.

Bir primal problemin dualinin oluşturulması ile ilgili kuralları tablo 1 deki gibi özetleyebiliriz.

Tablo 1: Primal - Dual Dönüşümü.

Primal Problem	**Dual Problem**
primal amaç fonksiyonu	dual amaç fonksiyonu
Maks (Min) $z=\sum_{J=1}^{n} c_J x_J$	Min (Maks) $w=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
i. primal kısıt	i. dual değişken
$\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} x_J \geq b_i$ ise $\rightarrow$	$y_i \leq (\geq)\ 0$
$\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} x_J = b_i$ ise $\rightarrow$	y_i kısıtsız
$\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} x_J \leq b_i$ ise $\rightarrow$	$y_i \geq (\leq)\ 0$
j. primal değişken	j. dual kısıt
$x_J \geq 0$ ise $\rightarrow$	$\sum_{i=1}^{m} a_{iJ} y_i \geq (\leq)\ c_J$
x_J kısıtsız ise $\rightarrow$	$\sum_{i=1}^{m} a_{iJ} y_i = c_J$
$x_J \leq 0$ ise $\rightarrow$	$\sum_{i=1}^{m} a_{iJ} y_i \leq (\geq)\ c_J$

Primal - dual dönüşümünde 5. ve 6. kuralların daha iyi anlaşılması açısından değişkenleri ve kısıtları normal ve normal değil şeklinde aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Optimizasyonun biçimi	Kısıt	Tanım
Maks.	$\leq$	Normal
	$\geq$	Normal değil
Min.	$\geq$	Normal
	$\leq$	Normal değil

Değişken	Tanım
x_j , y_i ≥ 0	Normal
x_j , y_i ≤ 0	Normal değil

Bu durumda 5. ve 6. kurallar aşağıdaki gibi uygulanabilir.

Primal değişken	İlgili dual kısıt
Normal	Normal
Normal değil	Normal değil
Kısıtsız	= biçiminde

Primal kısıt	İlgili dual değişken
Normal	Normal
Normal değil	Normal değil
= biçiminde	Kısıtsız

3. Örnek Problem

Primal Problem	Dual Problem
Maks $z= 4x_1+3x_2$	Min $w = 10y_1+8y_2+12y_3$
$4x_1+2x_2 =10$	$4y_1+5y_2+2y_3 \geq 4$
$5x_1+x_2 \geq 8$	$2y_1+y_2+3y_3 \geq 3$
$2x_1+3x_2 \leq 12$	y_1 kısıtsız, $y_2 \leq 0$, $y_3 \geq 0$
$x_1,x_2 \geq 0$	

Primal problemin standart biçimi:

Maks $z = 4x_1+3x_2-MR_1+0s_2-MR_2+0s_3$

Primal kısıtlarla ilgili dual değişkenler

$4x_1 + 2x_2 + R_1=10 \rightarrow$ $\mathbf{y_1}$

$5x_1 + x_2 - s_2 + R_2 =8 \rightarrow$ $\mathbf{y_2}$

$2x_1 + 3x_2 + s_3 =12 \rightarrow$ $\mathbf{y_3}$

$x_1, x_2, R_1, s_2, R_2, s_3 \geq 0$

Dual problem:

Dual kısıtlarla ilgili primal değişkenler

Min $w = 10y_1 + 8y_2 +12y_3$

$4y_1 + 5y_2 +2y_3 \geq 4 \rightarrow$ $\mathbf{x_1}$

$2y_1 + y_2 +3y_3 \geq 3 \rightarrow$ $\mathbf{x_2}$

$y_1 \geq -M \rightarrow$ $\mathbf{R_1}$

$-y_2 \geq 0 \rightarrow$ $\mathbf{s_2}$

$y_2 \geq -M \rightarrow$ $\mathbf{R_2}$

$y_3 \geq 0 \rightarrow$ $\mathbf{s_3}$

y_1, y_2, y_3 kısıtsız

Primal - Dual ilişkilerini örnek üzerinde göstermek amacıyla primal ve dual problemi ayrı ayrı simpleks metotla çözelim.

Tablo 2: Primal problemin çözümü.

İterasyon	Temel	x_1	x_2	s_2	R_1	R_2	s_3	Çözüm
	z	-4-9M	-3-3M	M	0	0	0	-18M
$\boxed{0}$	R_1	4	2	0	1	0	0	10
başlangıç	R_2	$\boxed{5}$	1	-1	0	1	0	8
tablosu	s_3	2	3	0	0	0	1	12
	z	0	$\frac{-11-6M}{5}$	$\frac{-4-4M}{5}$	0	$\frac{4+9M}{5}$	0	$\frac{32-18M}{5}$
$\boxed{1}$	R_1	0	$\boxed{6/5}$	4/5	1	-4/5	0	18/5
	x_1	1	1/5	-1/5	0	1/5	0	8/5
	s_3	0	13/5	2/5	0	-2/5	1	44/5
	z	0	0	4/6	$\frac{11+6M}{6}$	$\frac{-4+6M}{6}$	0	13
$\boxed{2}$	x_2	0	1	4/6	5/6	-4/6	0	3
optimal	x_1	1	0	-2/6	-1/6	2/6	0	1
tablo	s_3	0	0	-8/6	-13/6	8/6	1	1

$x_1 = 1$, $x_2 = 3$ ve Maks. $z = 13$

Dual problemdeki y_1 ve y_2 değişkenlerini

$y_1 = y'_1 - y''_1 \quad , y'_1, y''_1 \geq 0$

$y_2 = y'_2 - y''_2 \quad , y'_2, y''_2 \geq 0$

olarak ifade edelim.[5]

Dual problemin standart biçimi

$$\text{Min } w = 10y'_1 - 10y''_1 + 8y'_2 - 8y''_2 + 12y_3 + 0s'_1 + MR'_1 + 0s'_2 + MR'_2$$

$$4y'_1 - 4y''_1 + 5y'_2 - 5y''_2 + 3y_3 - s'_1 + R'_1 = 4$$

$$2y'_1 - 2y''_1 + y'_2 - y''_2 + 3y_3 - s'_2 + R'_2 = 3$$

$$y'_1, y''_1, y'_2, y''_2, y_3, s'_1, R'_1, s'_2, R'_2 \geq 0.$$

[5] Doğrusal programlama probleminin simpleks metotla çözümlenmesi için değişkenlerin pozitif kısıtlamaya ($y_i \geq 0$) sahip olması gerekir. Bu şartı sağlamayan değişkenler dönüşüme tabi tutulur.

Tablo 3: Dual problemin çözümü

İterasyon	temel	y'_1	y''_1	y'_2	y''_2	y_3	s'_1	s'_2	R'_1	R'_2	Çözüm
$\boxed{0}$	w	-10+6M	10-6M	-8+6M	8-6M	-12+5M	-M	-M	0	0	7M
	R'_1	4	-4	$\boxed{5}$	-5	2	-1	0	1	0	4
	R'_2	2	-2	1	-1	3	0	-1	0	1	3
$\boxed{1}$	w	$\frac{-18+6M}{5}$	$\frac{18-6M}{5}$	0	0	$\frac{-44+13M}{5}$	$\frac{-8+M}{5}$	-M	$\frac{8-6M}{5}$	0	$\frac{32+11M}{5}$
	y'_2	4/5	-4/5	1	-1	2/5	-1/5	0	1/5	0	4/5
	R'_2	6/5	-6/5	0	0	$\boxed{13/5}$	1/5	-1	-1/5	1	11/5
$\boxed{2}$	w	6/13	-6/13	0	0	0	-12/13	-44/13	$\frac{12-13M}{13}$	$\frac{44-13M}{13}$	180/13
	y'_2	$\boxed{8/13}$	-8/13	1	-1	0	-3/13	2/13	3/13	-2/13	6/13
	y_3	6/13	-6/13	0	0	1	1/13	-5/13	-1/13	5/13	11/13
$\boxed{3}$	w	0	0	-6/8	6/8	0	-6/8	-28/8	$\frac{6-8M}{8}$	$\frac{28-8M}{8}$	108/8
	y'_1	1	-1	13/8	-13/8	0	-3/8	2/8	3/8	-2/8	6/8
	y_3	0	0	-6/8	$\boxed{6/8}$	1	2/8	-4/8	-2/8	4/8	4/8
$\boxed{4}$	w	0	0	0	0	-1	-1	-3	1-M	3-M	13
	y'_1	1	-1	0	0	13/6	1/6	-5/6	-1/6	5/6	11/6
	y''_2	0	0	-1	1	8/6	2/6	-4/6	-2/6	4/6	4/6

$y_1 = y'_1 - y''_1 = 11/6 - 0 = 11/6$ Min w = 13
$y_2 = y'_2 - y''_2 = 0 - 4/6 = -4/6$

4. Primal - Dual İlişkileri

1) Optimum çözümdeki dual değişken değerleri; primal problemin optimal tablosundan (1) eşitliği kullanarak elde edilebilir.[6]

Primal başlangıç temel değişkenlerinin optimal tablodaki amaç satırı katsayıları	=	Primal başlangıç temel değişkeni ile ilgili dual kısıtın sol ve sağ tarafları arasındaki fark	(1)

Primal problemin başlangıç temel değişkenleri R_1, R_2 ve s_3 değişkenleridir.

Primal başlangıç temel değişkenleri	Optimal tablodaki amaç satırı katsayıları		İlgili dual kısıtın sol ve sağ tarafları arasındaki fark	İlgili dual kısıt
R_1	$(11/6) + M$	=	$y_1 - (-M)$	$y_1 \geq -M$
R_2	$(-4/6) + M$	=	$y_2 - (-M)$	$y_2 \geq -M$
s_3	0	=	$y_3 - 0$	$y_3 \geq 0$

Bu eşitliklerden $y_1 = 11/6$, $y_2 = -4/6$ ve $y_3 = 0$ elde edilir. Kısaca primal başlangıç temel değişkenlerinin optimal tablodaki amaç satırı katsayıları (varsa M sabitleri atılarak) aynı indisli dual değişken değerleridir.

2) Zayıf Dual Özelliği (Weak Duality Property) : Herhangi bir olurlu (feasible) primal ve dual çözüm çifti için;

$$\text{Maks } z\ (w) \leq \text{Min } w\ (z) \qquad (2)$$

Bu eşitsizlik herhangi bir olurlu primal ve dual çözüm çifti için minimizasyon amaçlı problemin (primal veya dual olması önemli değil) amaç fonksiyonu değerinin maksimizasyon amaçlı problemin amaç

6 TAHA, s. 121.

fonksiyonu değerine bir üst sınır olduğunu ifade etmektedir. (2) eşitsizliği zayıf dual özelliği olarak adlandırılmaktadır.[7]

3) Kuvvetli Dual Özelliği (Strong Duality Property). Her iki problemin optimum çözümü için:

$$\text{Maks } z\ (w) = \text{Min } w\ (z). \qquad (3)$$

Bu eşitlik primal ve dual problemin optimum çözüm değerlerinin birbirine eşit olduğunu ifade etmektedir.[8]

4)Tamamlayıcı Çözümler Özelliği (Complementary Solutions Property): Her bir iterasyonda simpleks metot primal problem için bir köşe nokta olurlu çözümü $\underline{X} = (x_j)$ ve dual problem için tamamlayıcı çözüm $\underline{Y} = (y_i)$ değerlerini eş zamanlı olarak belirler. Bu çözümlerin amaç değerleri birbirine eşittir.

$$\sum_{J=1}^{n} c_J\, x_J = \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i \qquad (4)$$

Eğer primal problem için $\underline{X} = (x_j)$ optimal değilse dual problem için $\underline{Y} = (y_i)$ olurlu (feasible) değildir.[9] Bu özellik, primal problem olurlu çözümlerle optimal çözüme ulaşırken, dual problem, olursuz (olurlu olmayan: infeasible) tamamlayıcı çözümlerle optimal çözüme ulaştığını ifade etmektedir.

5) Simetri Özelliği (Symmetry Property): Bir primal problemin dualinin duali kendisidir.

5. Primal - Dual Hesaplamaları

Herhangi bir iterasyonda simpleks tablo aşağıdaki gibidir.

---

7 HİLLİER, s. 137.
8 HİLLİER, s. 138.
9 HİLLİER, s. 138.

Tablo 4: Simpleks Tablonun Oluşturulması.

z	Asal ve/veya artık değişkenlerin amaç satırı katsayıları	Başlangıç temel değişkenlerinin amaç satırı katsayıları	Çözüm
Temel değiş-kenler	Asal ve/veya artık değişkenlerin kısıt katsayıları	Ters Matris	Sağ taraf sabitleri

Herhangi bir iterasyondaki ters matris, o iterasyondaki temel değişkenlerin orijinal kısıtlayıcı katsayıları matrisin tersidir. Bir doğrusal programlama probleminin herhangi bir iterasyondaki simpleks tablosunu aşağıda izah edilen hesaplamalarla oluşturmak mümkündür. Bu hesaplamalar duyarlılık analizlerinde önemli rol oynar.

1) Herhangi bir iterasyonda dual değişken değerleri aşağıdaki eşitliklerle bulunur.[10]

$$\begin{bmatrix} \text{Herhangi bir} \\ \text{iterasyonda} \\ \text{dual değişken} \\ \text{değerleri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{O iterasyondaki} \\ \text{temel değişkenlerin} \\ \text{orijinal amaç} \\ \text{satırı katsayıları} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{O} \\ \text{iterasyondaki} \\ \text{ters matris} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Örneğin primal problemin 1. iterasyonu için dual değişken değerleri:

$$[y_1 \quad y_2 \quad y_3] = [\,-M \quad 4 \quad 0\,] \begin{bmatrix} 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -2/5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\,-M \quad (4M+4)/5 \quad 0]$$

$y_1 = -M$, $y_2 = (4M+4)/5$, $y_3 = 0$

Primal problemin 2. iterasyonu (optimal tablo) için dual değişken değerleri:

$$[\,y_1 \quad y_2 \quad y_3\,] = [\,3 \quad 4 \quad 0\,] \begin{bmatrix} 5/6 & -4/6 & 0 \\ -1/6 & 1/5 & 0 \\ -13/6 & 8/6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=[\,11/6 \quad -4/6 \quad 0\,]$$

$y_1 = 11/6$, $y_2 = -4/6$, $y_3 = 0$

---

[10] TAHA, s. 131.

2) Herhangi bir iterasyonda değişkenlerin amaç satırı katsayıları türetilebilir.[11]

$$\begin{bmatrix}\text{Herhangi bir iterasyonda} \\ \text{değişkenlerin amaç} \\ \text{satırı katsayıları}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Değişkenlerle ilgili dual} \\ \text{kısıtların sol ve sağ tarafları} \\ \text{arasındaki fark}\end{bmatrix} \quad (6)$$

Örneğin primalin 1. iterasyonunda amaç satırı katsayıları:

Değişkenler	İlgili dual kısıtlar	Dual kısıtların sol ve sağ tarafları arasındaki fark
x_1 :	$4y_1+5y_2+2y_3 \geq 4$	$4y_1+5y_2+2y_3-4= 4(-M)+$ $5[(4M+4)/5]+2.0 - 4=0$
x_2 :	$2y_1+y_2+3y_3 \geq 3$	$2y_1+y_2+3y_3-3=2(-M)+[(4M+4)$ $/5]+3*0-3= (-11-6M)/5$
R_1 :	$y_1 \geq -M$	$y_1 - (-M) = -M - (-M) = 0$
s_2 :	$-y_2 \geq 0$	$-y_2 - 0 = -[(4M+4)/5] -0 =$ $(-4-4M)/5$
R_2 :	$y_2 \geq -M$	$y_2 - (- M) = (4M+4)/5-(- M) =$ $(4+9M)/5$
s_3 :	$y_3 \geq 0$	$y_3 -0 = 0 - 0 = 0$

Primalin 2. iterasyonunda amaç satırı katsayıları:

Değişkenler	İlgili dual kısıtlar	Dual kısıtların sol ve sağ tarafları arasındaki fark
x_1 :	$4y_1+5y_2+2y_3 \geq 4$	$4.11/6+5 - (4/6)+2.0 - 4 = 0$
x_2 :	$2y_1+y_2+3y_3 \geq 3$	$2.11/6+(-4/6)+3.0 - 3 = 0$
R_1 :	$y_1 \geq -M$	$11/6 - (-M) = (11+6M)/6$
s_2 :	$-y_2 \geq 0$	$-(-4/6) - 0 = 4/6$
R_2 :	$y_2 \geq -M$	$-4/6 - (-M) = (-4+6M)/6$
s_3 :	$y_3 \geq 0$	$0-0 = 0$

[11] TAHA, s. 130.

3) Herhangi bir iterasyonda tüm değişkenlerle ilgili kısıtlayıcı katsayıları türetilebilir.[12]

$$\begin{bmatrix} \text{Herhangi bir iteras-} \\ \text{yonda değişkenlerin} \\ \text{kısıtlayıcı katsayıları} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{iterasyondaki} \\ \text{ters matris} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \text{Değişkenlerin} \\ \text{orijinal kısıtla-} \\ \text{yıcı katsayıları} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Örneğin primalin 2. iterasyonunda değişkenlerin kısıtlayıcı katsayıları:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \text{katsayısı} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -4/6 & 0 \\ -1/6 & 2/6 & 0 \\ -13/6 & 8/6 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \text{katsayısı} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -4/6 & 0 \\ -1/6 & 2/6 & 0 \\ -13/6 & 8/6 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_2 \\ \text{katsayısı} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -4/6 & 0 \\ -1/6 & 2/6 & 0 \\ -13/6 & 8/6 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/6 \\ -2/6 \\ -8/6 \end{bmatrix}$$

4) Herhangi bir iterasyonda sağ taraf sabitleri (temel değişken değerleri) türetilebilir.

$$\begin{bmatrix} \text{Herhangi bir} \\ \text{iterasyonda} \\ \text{sağ taraf sabitleri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{0 iterasyondaki} \\ \text{ters matris} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \text{orijinal} \\ \text{sağ taraf} \\ \text{sabitleri} \end{bmatrix}$$

Primalin 2. iterasyonunda temel değişken değerleri:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -4/6 & 0 \\ -1/6 & 2/6 & 0 \\ -13/6 & 8/6 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

[12] TAHA, s. 130.

6. Dual Değişkenlerin Ekonomik Yorumu

Daha önce ifade edildiği gibi her iki problemin (primal ve dual) optimum çözüm değerleri birbirine eşittir.

$$z = w = \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i$$

Bu eşitlikten de anlaşılacağı üzere i. dual değişken y_i ; bir birim i. kaynağın amaç fonksiyonuna katkısı olarak yorumlanabilir. Başka bir deyişle y_i ; i. kaynak miktarı b_i bir birim arttırıldığında amaç fonksiyonu değerinde meydana gelen değişimi ifade eder. Dolayısıyla y_i ; i. kaynağın marjinal verimliliği olarak yorumlanabilir.[13] Dual değişkenler (y_i , i = 1,2,..., m) gölge fiyatlar (shadow prices) olarak adlandırılmaktadır. Optimal primal tabloda başlangıç temel değişkenlerinin amaç satırı katsayıları (varsa M sabitleri atılarak) gölge fiyatları (dual değişken değerleri) vermektedir. Kaynak dağıtımında gölge fiyatlar önemli rol oynamaktadır. Gölge fiyatı pozitif olan kaynakları mümkün olduğu kadar artırmak ve negatif olan kaynakları azaltmak işletmelerin karlılığı açısından önemlidir.

7. Dual Kısıtların Ekonomik Yorumu

Dual kısıtların sol tarafları:

$$z_J = \sum_{i=1}^{m} a_{iJ}\; y_i \qquad (j = 1,2,...,n)$$

bir birim j faaliyeti için kullanılan kaynaklara yüklenen maliyet (imputed cost) olarak tanımlanabilir.[14]

Maks. (Min.) amaçlı bir primal problemde j. değişkene ($x_j \geq 0$) karşılık gelen dual kısıt:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{iJ}\; y_i \;\geq\; (\leq)\;\; c_J \qquad \text{veya} \qquad z_J \;\geq\; (\leq)\;\; c_J$$

bir birim j. faaliyet için kullanılan kaynaklara yüklenen maliyetin en az (en fazla) j. faaliyetin birim karı (maliyeti) kadar olması gerektiğini ifade etmektedir. Aksi halde kaynak dağıtımı en iyi yapılmıyor (çünkü bu kısıtın

---

[13] MORALI Nilgün, **Harmanlama problemlerine iki değişik yaklaşım ve bir uygulama**, İzmir, 1990, s. 35

[14] TAHA, s. 134.

sağlanmaması çözümün optimal olmadığını gösterir) demektir. Dual kısıtların sol ve sağ tarafları arasındaki fark (z_j- c_j); j. değişkenin (faaliyetin) fırsat maliyeti (opportunity cost) olarak adlandırılır. Fırsat maliyeti karlı (profitable) olmayan faaliyeti bir birim üretmenin karda (maliyette) meydana getireceği azalışı (artışı) ifade etmektedir. Fırsat maliyeti sıfırdan farklı olan değişkenler optimal çözümde yer almamaktadır. Bu durum

$z_j - c_j = 0$, $x_j \geq 0$ (x_j temel değişken) ise

$z_j - c_j \neq 0$, $x_j = 0$ (x_j temel olmayan değişken) ise

olarak ifade edilebilir.

Maksimizasyon amaçlı bir problem için optimalite şartı:

Tüm $z_j - c_j \geq 0$ veya tüm $z_j \geq c_j$.

Temel olmayan bir değişkenin kar katsayısı c_j ; z_j değerinden büyük olacak şekilde artırıldığında x_j değişkeni optimal çözümde temel değişken olacaktır. Aynı şekilde minimizasyon amaçlı bir problem için optimalite şartı:

Tüm $z_j - c_j \leq 0$ veya tüm $z_j \leq c_j$.

Temel olmayan bir değişkenin maliyet katsayısı c_j ; z_j değerinden küçük olacak şekilde azaltıldığında x_j değişkeni optimal çözümde temel değişken olacaktır.

Sonuç

Doğrusal programlama işletme problemlerinde sıkça kulllanılan bir optimizasyon tekniğidir. Bir doğrusal programlama modelinin oluşturulması, çözümü, dualinin alınması, dual değişken ve kısıtların ekonomik yorumları önem arzetmektedir. Bu nedenle çalışmada primal - dual dönüşümleri, ilişkileri ve dualitenin ekonomik yorumu üzerinde durulmuştur.

KAYNAKÇA

1. HİLLİER F.S. LİEBERMAN G.J., **Introduction to Operations Research**, Fourth Edition, Holden - Day, Inc. California, 1989.
2. MORALI, Nilgün, **Harmanlama Problemlerine İki Değişik Yaklaşım ve Bir Uygulama**, İzmir, 1990.
3. ÖZDEN, Kenan, Primal ve Dual Eniyi Çözüm Kümeleri Dönüşümüne Bir Ekleme", **D.E.Ü. İ.İ.B.F**. Dergisi, Cilt.5, Sayı.1-2, İzmir, 1990.
4. TAHA, Hamdy A., **Operations Research**, Macmillan Publishing Company, Fourth Edition, New York, 1987.