Süleyman Demirel Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi
Y. 1997, S. 2(Güz) s. 377-386.

KÜME ÖRTÜLEME PROBLEMİ VE BİR UYGULAMA

Yrd.Doç.Dr.İbrahim GÜNGÖR*
Yrd.Doç.Dr.Abdullah EROĞLU**

Özet

Küme örtüleme problemlerinin, 0-1 tamsayılı modellerinin kolayca kurulabilmesi ve optimum çözümlerinin simpleks yöntemle elde edilebilmesi açısından ilginç bir özelliği vardır.

Bu çalışmada, küme örtüleme problemlerinin kendine has özellikleri ve çözüm yolları araştırıldıktan sonra, bir işyerinde iş takibi vs. amaçlarla yapılacak gözetleme işlemi için gözetleme kulelerinin minimum maliyetli yerleşim planının belirlenmesi sorunu küme örtüleme problemi olarak düzenlenip optimum çözümü araştırılmaktadır.

Giriş

Küme örtüleme problemi (Set Covering Problem) konusunda yurt dışında pek çok çalışma yapılmış[1] olmasına karşın yurt içinde bu konuda yapılmış bir çalışmaya rastlamak mümkün olmamıştır.

Bu çalışmanın amacı; küme örtüleme problemlerinin yapısal özelliklerini ve bu problemlerin çözüm yollarını araştırmak ve bir işyerinde (iş takibi vs. amaçlarla) yerleştirilecek gözetleme kulelerinin optimum yerleşim planının ortaya konulması sorunu için bir uygulama yapmaktır.

İkinci bölümde küme örtüleme problemi tanıtılmakta ve bu problemin kendine has özellikleri konusunda bilgi verilmektedir. Üçüncü bölümde bu tür problemlerin optimum çözümlerinin nasıl elde edilebileceğine yer verilmektedir. Dördüncü bölümde, belirli bir alanın tamamının gözetlene-bilmesi için minimum maliyetli gözetleme kulelerinin yerleşim

---

* Süleyman Demirel Üniversitesi İ.İ.B.F. İşletme Bölümü Öğretim Üyesi.
** Süleyman Demirel Üniversitesi İ.İ.B.F. İşletme Bölümü Öğretim Üyesi.

1 Marshall L. FISHER-Pradeep KEDIA, “Optimal Solution of set Covering/Partitioning Problems Using Dual Heuristics”, **Management Science,** Vol. 36, 1990, s. 675.

yerlerinin belirlenmesi şeklindeki bir küme örtüleme probleminin tanıtımı ve çözümü yapılmaktadır.

1. Küme Örtüleme Probleminin Özellikleri

Küme örtüleme problemi litaratürde genellikle örtüleme problemi "covering problem, le probleme de recouvrement" kısa ismiyle yer almakta olup aşağıdaki gibi formüle edilmektedir[2] :

$$Min \quad Z = c.x \qquad (2.1)$$

$$Kısıtlar \; : \quad A.x \geq e \qquad (2.2)$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad (2.3)$$

Burada, mxn boyutunda olan $A = (a_{ij})$ matrisi 0 ve 1 değerlerinden oluşan bir matristir. i 'inci eleman j 'inci altküme içinde yer alıyorsa $a_{ij} = 1$, diğer durumda $a_{ij} = 0$ değer alır.

e, mx1 boyutunda ve bütün elemanları 1 olan bir vektördür.

c, 1xn boyutunda olup pozitif katsayılardan oluşan bir vektördür. Bu katsayılar, küme örtüleme probleminin uygulanacağı ana küme içinden önceden belirlenen olası bütün alt kümelerin (n tane) oluşum maliyetleridir.

x , x_j değişkenlerinden oluşan nx1 boyutunda bir vektördür. j'inci alt küme optimal çözüm içinde yer alacak altkümelerden biri ise $x_j = 1$, diğer durumda $x_j = 0$ değerini alır.

Yukarıdaki ifadelerden de anlaşıldığı gibi, küme örtüleme problemi 0-1 tamsayılı doğrusal model ile ifade edilmektedir. Bu modelin kurulabilmesi için aşağıdaki işlemler takip edilir:

i- Küme örtüleme probleminin uygulanacağı S ana kümesinin bütün elemanları (m tane) belirlenir ve numaralandırılır.

ii- Ele alınan sorunun yapısına göre, optimum çözümde yeralması olasılığı olan bütün M_j altkümeleri (n tane) eleman numaralarıyla

---

[2] ROSEAUX , **Exercices et Problèmes Résolus de Recherche Opératıonnelle**, Tome 3 MASSON Paris Milan Barcelona Bonn, 1991, s. 311.

belirlenir. Böylelikle bir alt kümeler seti $F = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$ oluşturulur.

iii- m tane satır n tane sütundan oluşan ve mxn tane hücresi olan küme örtüleme tablosu hazırlanır. M_j alt kümesinde i 'inci eleman yer alıyorsa, tablonun i 'inci satır j 'inci sütunda bulunan gözün değeri 1 yani $a_{ij} = 1$, diğer durumda $a_{ij} = 0$ değeri yazılır. Bu tablodaki katsayılar, (2.3) eşitsizliğinde yer alan A matrisini oluşturur.

iv- M_j alt kümelerinin oluşum maliyetleri (j 'inci kulenin kuruluş maliyeti) hesaplanır. Bu maliyet katsayılarından oluşan 1xn boyutundaki vektör (2.1) amaç fonksiyonunun katsayılarını oluşturur.

v- Uygun bir çözümde her bir elamanın en az bir alt kümede yer alması zorunluluğu olduğu için (2.2) eşitsizliklerinin hepsinin de sağ tarafına 1 yazılır. Bu şekilde elde edilen ve bütün elamanları 1 olan mx1 boyutundaki vektör modeldeki e vektörünü oluşturur.

Küme örtüleme probleminin herhangi bir uygun çözümüyle F'nin bir alt kümesi elde edilir ki bu alt kümede yer alan M_j alt kümelerinin bileşimleri S ana kümesini vermek zorundadır.

Literatürde genellikle ikisi bir arada ele alınan küme bölme problemi ve küme örtüleme problemini birbirinden ayıran en önemli özellik; küme bölme probleminde kısıtlar $(A.x = e)$ şeklinde iken[3] küme örtüleme probleminde $A.x \geq e$ şeklindedir. Bu farklı kısıtlayıcı denklemlerden dolayı; küme bölme probleminin herhangi bir uygun çözümünde yer alan M_j alt kümelerinin bileşimleri S ana kümesini ve kesişimleri ise boş kümeyi vermek zorunda olmalarına karşın, küme örtüleme probleminde sadece bileşimleri S ana kümesini vermesi zorunluluğu vardır. Bu durum, küme örtüleme probleminin optimum çözümünün bulunmasını, küme bölme probleminin optimum çözümünün bulunması işlemlerine göre çok daha kolay hale gelmesine yol açmaktadır.

---

[3] İbrahim GÜNGÖR ,"Küme Bölme Modeli ve Uygulama Alanları" , **Marmara Üniversitesi İstatistik Ve Ekonometri Araştırma Ve Uygulama Merkezi Dergisi** , S. 2 , 1994 , s. 198.

2. Küme Örtüleme Probleminin Optimum Çözümü

Küme örtüleme probleminin çözümü için literatürde çeşitli algoritmalar vardır [4]. Ancak bu problem,

$$Z = c.x$$
$$A.x \geq e$$
$$x_j \geq 0$$

şeklinde doğrusal programlama olarak ele alınıp simpleks yöntemle çözülmesi halinde küme örtüleme problemindeki $x_j \in \{0,1\}$ kısıtına uygun olan optimum çözümün elde edildiği gözlenmiştir. Bu amaçla, çok sayıda ve farklı yapıda küme örtüleme problemi oluşturuldu ve QSB paket programı kullanılarak simpleks yöntemle çözümleri elde edildi ve ele alınan bütün problemler için optimum çözüm sonuçlarında değişkenlerin değerinin 0 veya 1 olarak ortaya çıktığı gözlendi.

3. Bir İşyerinde Gözetleme Kulelerinin Yerleştirilmesi

Bu çalışma Isparta da yapıldı. Isparta da böyle bir uygulama çalışmasının yapılabileceği bir işyeri (Askeri alanlar dışında) bulunamadığından, problemle ilgili veriler hayali olarak belirlendi. Ancak, kullanılan verilerin gerçek hayata olabildiğince uygun olmasına özen gösterildi.

3.1. Problemin Özelliği

Büyük bir işyerinde stratejik önemi olan 25 ayrı noktanın (ve çevresinin) 24 saat gözetim altında tutulması isteniyor. Bunun birçok nedeni olabilir. İşlerin gidişatının takibi ve yönlendirilmesi, hırsızlıkların takibi, suikastların önlenmesi, gelen giden kişilerin ve araçların takibi vs. Gözetleme işlemi insan gözüyle olabileceği gibi, kamera sistemi gibi teknolojik aletlerle de olabilir.

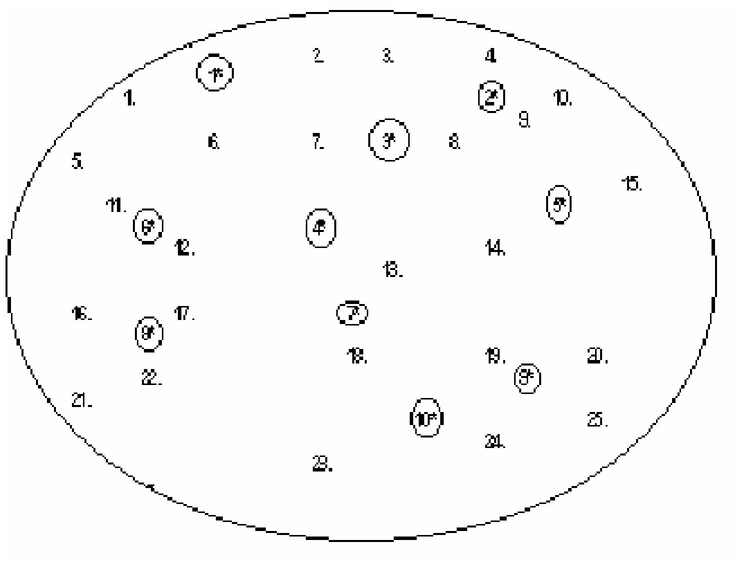
Bu işyerinde titiz bir araştırmadan sonra 10 ayrı yerde gözetleme kulesi kurulabileceği belirlenir. Olası kule yerlerinin belirlenirken, o yerde kule kurulmasının olanaklı olmasına, o yerin görüş açısının olabildiğince fazla olmasına, gözetlenmesi gereken her bir noktanın en az bir kuleden görülebilecek şekilde olmasına çok özen gösterilmesi gerekir. Ayrıca, bu şartlara uyan olası bütün kule yerleri belirlenip modele dahil edilmeli ki,

[4] ROSEAUX , s. 311-322.

problemin çözümü sonucunda maliyet minimi-zasyonu açısından en uygun olan kule yerleri belirlenebilsin.

Böyle bir işyerinin görünümü Şekil 1'de gösterilmektedir. Şekil-de yuvarlak içindeki rakamların bulunduğu noktalar kurulması olası olan kule yerlerini (S_j), diğer rakamların bulunduğu noktalar gözetlenmesi gereken noktaları (w_i) sembolize etmektedir.

Şekil 1. Uygulama Yapılan İşyerinin Görünümü



1* Kurulması olası olan kule yeri

1. Gözetlenmesi gereken nokta

3.2. Küme örtüleme Modelinin Düzenlenmesi

Önce her bir kuleden görülebilen w_i noktaları belirlenir. Bu işyerinde kuruması olasılığı olan kulelerin kuruluş maliyetleri ve bu kulelerden görülmesi mümkün olan w_i noktaları Tablo 1'de görülmektedir.

Tablo 1. Kurulması Olası Olan Gözetleme Kulelerinin Kuruluş Maliyetleri ve Bu Kulelerden Görülebilen Noktalar

	C_j	S_j kulesinden görülebilen noktalar
S_1	15	1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12
S_2	18	3, 4, 8, 9, 10, 14, 15
S_3	17	2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14
S_4	20	2, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19
S_5	14	3, 4, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 19, 20, 25
S_6	19	1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 21, 22
S_7	19	7, 8, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25
S_8	13	11, 12, 13, 16, 17, 18, 21, 22, 23
S_9	10	13, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25
S_{10}	21	13, 14, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25

Tablo 1'deki verilerden küme örtüleme tablosu olarak isimlendirilen Tablo 2 oluşturulur.

Tablo 2. Küme Örtüleme Tablosu

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
1.	1					1				
2.	1		1	1						
3.	1	1	1		1					
4.		1	1		1					
5.	1					1				
6.	1		1	1		1				
7.	1		1	1		1	1			
8.		1	1	1	1		1			
9.		1	1		1					
10.		1	1		1					
11.	1			1		1		1		
12.	1		1	1		1	1	1		
13.			1	1	1	1	1	1	1	1
14.		1	1	1	1		1		1	1
15.		1			1				1	
16.						1		1		
17.				1		1	1	1		1
18.				1		1	1	1	1	1
19.				1	1		1		1	1
20.					1		1		1	1
21.						1		1		
22.						1		1		1
23.							1	1	1	1
24.							1		1	1
25.					1		1		1	1

Buna göre, S_j kulesi w_i noktasını görüyorsa i'inci satır j 'inci sütunu temsil eden göze 1 değeri, diğer durumda 0 değeri yazılarak oluşturulan bu tablodaki sayılar (2.2) nolu kısıtların $A=(a_{ij})$ matrisini oluşturur. C_j sütunundaki sayılar S_j kulelerinin kuruluş maliyetleri olup amaç fonksiyonu katsayılarını oluşturacaktır.

S_j kulesi kısıtlara ve amaca uygun bir çözüm planına göre kurulması gereken bir kule ise $X_j = 1$, değilse $X_j = 0$ değer alır şeklinde bir tanımlamaya uygun olarak bu problemin 0-1 doğrusal tamsayılı modeli aşağıdaki gibi kurulur:

Min.Z=$15X_1+18X_2+7X_3+20X_4+14X_5+19X_6+19X_7+13X_8+10X_9+21X_{10}$

Kısıtlar: $X_1 + X_6 \geq 1$

$X_1 + X_3 + X_4 \geq 1$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_5 \geq 1$

$X_2 + X_3 + X_5 \geq 1$

$X_1 + X_3 + X_4 + X_6 \geq 1$

$X_1 + X_3 + X_4 + X_6 + X_7 \geq 1$

$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_7 \geq 1$

$X_1 + X_4 + X_6 + X_8 \geq 1$

$X_1 + X_3 + X_4 + X_6 + X_7 + X_8 \geq 1$

$X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} \geq 1$

$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_7 + X_9 + X_{10} \geq 1$

$X_2 + X_5 + X_9 \geq 1$

$X_6 + X_8 \geq 1$

$X_4 + X_6 + X_7 + X_8 + X_{10} \geq 1$

$X_4 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} \geq 1$

$X_4 + X_5 + X_7 + X_9 + X_{10} \geq 1$

$X_5 + X_7 + X_9 + X_{10} \geq 1$

$X_6 + X_8 + X_{10} \geq 1$

$X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} \geq 1$

$X_7 + X_9 + X_{10} \geq 1$

Xj $\geq$ 0 veya 1

Tablo 2'den de görüleceği üzere, 5 nolu kısıt 1 nolu kısıtın, 9 ve 10 nolu kısıt 4 nolu kısıtın , 21 nolu kısıt 16 nolu kısıtın , 25 nolu kısıt 20 nolu kısıtın aynısı olacağından 5,9,10,21,25 nolu noktaların en az bir kule tarafından görülmesi gerektiği ile ilgili kısıtlar modelden atılmıştır. Çünkü 1,4,16,20 nolu noktalarla ilgili kısıtlar sağlandığında 5,9,10, 21,25 nolu noktalarla ilgili kısıtlar da sağlanmış olacaktır.

3.3. Problemin Çözümü

Bu problemin çözümünde QSB paket programı kullanıldı. Tamsayılı olmayan doğrusal programlama olarak ele alınıp simpleks yöntemle yapılan çözümde optimum çözüm sonuçları :

$$X_3 = X_6 = X_9 = 1$$
$$X_1 = X_2 = X_4 = X_7 = X_8 = X_{10} = 0$$
$$\min Z = 46$$

olarak bulunmuştur.

Görüldüğü gibi, $X_j \geq 0$ kısıtına göre yapılan çözüm sonuçları $X_j = 0$ veya $X_j = 1$ şeklinde elde edilmiştir.

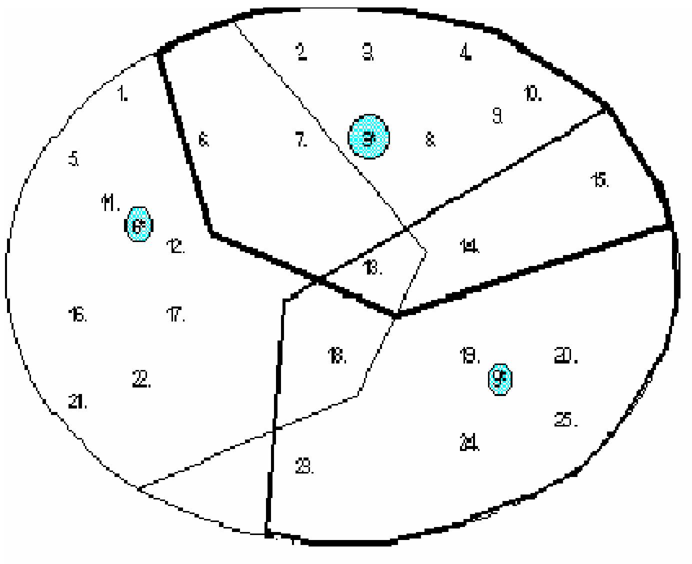
Bu sonuca göre, o işyerinde belirlenen S_3, S_6 *ve* S_9 yerlerine gözetleme kuleleri kurulmalıdır. İstenilen şartları minimum maliyetle karşılayabilen bu kulelerin yerleştirilmesi maliyeti 46 para birimidir. S_3, S_6 *ve* S_9 kulelerinden gözetlenebilen noktalar, yani bu kulelerin örtülediği alanlar Tablo 3'de ve Şekil 2'de görülmektedir.

Tablo 3. Optimum Çözüme Göre Kurulması Gereken Gözetleme

Kuleleri ve Bu Kulelerden Gözetlenebilen Noktalar.

Kule	C_j	S_j kulesinden görülebilen noktalar
S_3	17	2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14
S_6	19	1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 21, 22
S_9	10	13, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25

Şekil 2. Optimum Çözüme Göre Kurulması Gereken Gözetleme Kuleleri ve Bu Kulelerden Gözetlenebilen Noktaların Görünümü



Şekil 2'de de görüldüğü gibi, küme örtüleme problemlerinin optimum çözüm sonucuna göre elde edilen üç alt kümenin bileşimlerinin ana kümeyi vermesi şartı da sağlanmıştır. Yani,

$$\{2,3,4,6,7,8,9,10,12,13,14\} \cup \{1,5,6,7,11,12,13,16,17,18,21,22\} \cup \{13,14,15,18,19,20,23,24,25\}$$
$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25\}$$

olmaktadır. Bu sonuca göre bütün noktalar 3,6,9 nolu kulelerden en az bir tanesi tarafından gözetlenebilmektedir. Ayrıca, 6,7,13 nolu noktalar 3 ve 6 nolu kulelerin ikisinden birden görülebilmektedir. 13,14,15 nolu noktalar 3 ve 9 nolu kulelerden, 13,18 nolu noktalar 3 ve 9 nolu kulelerin ikisinden birden görülebilmektedir. 13 nolu nokta ise üç kuleden de görülebilmektedir.

Sonuç

Gerçek hayatta, bir şehirde itfaiye araçlarının bekleme merkezlerinin seçimi, bir bölgede televizyon yansıtıcılarının yerleşimi, geniş bir ormanlık alanda yangın gözetleme merkezlerinin yerleşimi, bir bölgeyi kontrolü altında tutmak için askeri birliklerin yerleşimi, belli bir alanda yaşayan insanlara bilgiler vermek için hopörlerlerin yerleşimi vb. sorunların küme örtüleme problemi olarak ele alınıp çözümleri yapılabilir.

Küme örtüleme problemlerinin kendine has özel bir yapısı vardır. Bu problemlerin 0-1 tamsayılı doğrusal modeli kurulmaktadır. Çünkü, modelde kullanılan değişkenlerin 0 veya 1 değeri almak zorunluluğu vardır. Fakat, modelin optimum çözümü tamsayılı olmayan doğrusal programlama problemleri de kullanılan simpleks yöntemine göre yapıldığında optimum çözüm değerleri 0 veya 1 olarak elde edilebilmektedir.

Bu problemin yapısına uygun olan sorunların 0-1 doğrusal modelinin kolayca kurulabilmesi ve optimum çözümünün simpleks yöntemle kolayca ve kısa sürede bulunabilmesi nedeniyle küme örtüleme problemlerinin yöney-lem araştırması alanında ilginç bir yeri bulunmaktadır.

Bu nedenle, küme örtüleme probleminin yapısına direkt olarak uygun olmayan fakat bu yapıya uyarlanması mümkün olan (Optimi-zasyon amaçlı olan veya optimizasyon amaçlı olmayan) sorunların çözümünde bu problemin çözüm yönteminden yararlanılmasının çok uygun olabileceği söylenebilir.

KAYNAKÇA

1. FISHER Marshall L.-Pradeep KEDIA, "Optimal Solution of Set Covering/Partitioning Problems Using Dual Heuristics", **Manage-ment Science**, Vol. 36 , 1990.

2. GÜNGÖR İbrahim ,"Küme Bölme Modeli ve Uygulama Alanları", **Marmara Üniversitesi İstatistik ve Ekonometri Araştırma ve Uygulama Merkezi Dergisi** , S. 2 , 1994.

3. ROSEAUX, **Exercices et Problèmes Résolus de Recherche Opératıonnelle**, Tome 3 MASSON Paris Milan Barcelona Bonn, 1991.