SDÜ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
FEN DERGİSİ (E-DERGİ). 2007, 2(2), 228-235

g^{CC} SEMI-RIEMANN METRİKLİ DOUBLE TANJANT DEMETİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

İsmet AYHAN[*], A. Ceylan ÇÖKEN[**]

[*] *P.A.Ü., Eğitim Fakültesi, Fen Bilgisi Öğretmenliği A.B.D., Denizli, Türkiye*
[**] *S.D.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 32260, Isparta, Türkiye*
e-mail: iayhan@pau.edu.tr, ceylan@fef.sdu.edu.tr
Alınış: 10 Mayıs 2007, Kabul: 24 Ekim 2007

Özet: Bu çalışmada, diferensiyellenebilir bir manifold üzerindeki bir semi-Riemann metriğin ikinci mertebeden tam yüseltilmesi ile elde edilen g^{CC} nin bir semi-Riemann metriği olduğu gösterildi ve bu metriğin Levi-Civita koneksiyonu bileşenler cinsinden hesaplandı.

Anahtar kelimeler: Semi-Riemann metrik, Double tanjant demet, Levi-Civita koneksiyonu, Lie Parantez operatörü

THE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF DOUBLE TANGENT BUNDLE WITH g^{CC} SEMI-RIEMANNIAN METRIC

Abstract: In this paper, it is shown that g^{CC}, which is obtained in term of the second order the complete lift of a semi-Riemannian metric on a differentiable manifold, is a semi-Riemannian metric and it is calculated the connection coefficients of the Levi-Civita connection of the this metric.

Key words: Semi-Riemannian metric, The double tangent bundle, Levi-Civita connection, Lie bracket operator

Mathematics Subject Clasifications (2000): 53C07, 53C50

1. GİRİŞ

Bir Riemann manifoldunun tanjant demeti üzerindeki metrikler konusundaki çalışmalar 1950'li yılların sonlarında başladı. (YANO & ISHIHARA 1970), M manifoldu üzerindeki bir Riemann ve semi-Riemann metriğin yükseltmelerine bağlı olarak TM manifoldu üzerindeki metrikleri tanımladı ve bu metrikler yardımıyla TM manifoldunun diferensiyel geometrisini inceledi. (OPROIU & PAPAGHIUC 1988), TM üzerinde, Yano ve Ishihara'nın tanımladığından farklı bir non-lineer koneksiyon kullanarak, g^C semi-Riemann metrikli TM manifoldunun diferensiyel geometrisini inceledi. (ESİN & CİVELEK 1989), diferensiyellenebilir bir manifold üzerindeki fonksiyon, vektör alanı ve 1-form gibi temel tensör alanlarının double tanjant demet üzerine tam yükseltilmişini elde etti. (AYHAN vd. 2005), diferensiyellenebilir bir manifoldun tanjant demeti üzerinde tanımlı fonksiyon vektör alanı ve 1-formun yatay yükseltilmişlerini elde etti.

(AYHAN 1997) ve (AYHAN 2006), (0,2) tipinden bir tensör alanının ikinci mertebeden dikey ve tam yükseltmelerini inceledi.
Bu çalışmada, double tanjant demetin uyarlanmış lokal baz vektör alanlarının Lie parantez operatörü altındaki değerleri hesaplandı. Daha sonra diferensiyellenebilir bir manifold üzerindeki bir semi-Riemann metriğin ikinci mertebeden tam yükseltilmesiyle elde edilen g^{CC} nin bir semi-Riemann metrik olduğu gösterildi ve bu metriğe bağlı Levi-Civita koneksiyonu bileşenler cinsinden hesaplandı.

Çalışma boyunca, tüm diferensiyel geometrik objelerin C^{∞} sınıftan diferensiyellenebilir olduğu ve tekrar eden indisler üzerinden toplam alındığı kabul edilmiştir.

2. TTM MANİFOLDU ÜZERİNDEKİ DİFERENSİYEL GEOMETRİK OBJELER

M n-boyutlu bir semi-Riemann manifold, TM onun tanjant demeti olmak üzere $p \in M$ nin U açık komşuluğu üzerindeki haritaya bağlı olarak M için bir lokal koordinat sistemi $(x) = \{x^1,...,x^n\}$ olsun. O zaman $\tau_M(Z_p) = p$ eşitliğini sağlayan $\tau_M : TM \to M$ kanonik izdüşüm olmak üzere $\tau_M{}^{-1}(U) = U^{/}$ TM deki $\tau_M{}^{-1}(\{p\})$ noktasının bir açık komşuluğudur. Böylece $\forall Z_p \in U^{/}$ noktası için,

$$(x,y)(Z_p) = (x^1(p),...,x^n(p), Z_p[x^1],...,Z_p[x^n]) \tag{1}$$

şeklinde tanımlı (x,y) dönüşümü $U^{/}$ üzerinde lokal bir harita olup $(x^i, y^i; 1 \le i \le n)$ sistemi TM için indirgenmiş lokal koordinat sistemidir. Ayrıca $\tau_{TM}(A_Z) = Z$ eşitliğini sağlayan $\tau_{TM} : TTM \to TM$ kanonik izdüşüm olmak üzere $\tau_{TM}{}^{-1}(U^{/}) = U^{//}$, TTM deki $\tau_{TM}{}^{-1}(\{Z\})$ noktasının bir açık komşuluğudur. Böylece $\forall A_Z \in U^{//} \subset TTM$ noktası için

$$(x,y,z,t)(A_Z) = (x(p), y(Z), z(A_Z), t(A_Z)), \quad (1 \le i \le n) \tag{2}$$

olur. (x,y,z,t) dönüşümünün lokal koordinat fonksiyonları

$$\begin{aligned} x(p) &= x^i(p) \\ y(Z) &= Z_p[x^i] = y^i(Z) \\ z(A_Z) &= A_Z[x^i] = z^i(A_Z) \\ t(A_Z) &= A_Z[y^i] = t^i(A_Z) \quad (1 \le i \le n) \end{aligned} \tag{3}$$

şeklinde tanımlı olup (x,y,z,t), $U^{//}$ için bir haritadır ve $(x^i, y^i, z^i, t^i; 1 \le i \le n)$ sistemi TTM için indirgenmiş lokal koordinat sistemidir (CİVELEK 1988).
TM nin tanjant demeti TTM, TM üzerinde dikey dağılım olarak adlandırılan $VTM = Çek(\tau_M)_*$ integrallenebilen altvektör demetine sahiptir. TM üzerinde bir non-lineer koneksiyon HTM dağılımı ile tanımlı olup VTM nin tamamlayıcısıdır. Bu dağılıma TM üzerinde yatay dağılım denir.

Böylece

$$TTM = VTM \oplus HTM \tag{4}$$

dir. Bu direkt toplam ayrışımına uyarlanmış TM deki lokal çatı $\{\delta_i, \partial_i; 1 \le i \le n\}$ dir.
Buradaki

$$\delta_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H = \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i{}^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \qquad N_i{}^j = y^k \Gamma_{ki}{}^j \tag{5}$$

SDÜ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
FEN DERGİSİ (E-DERGİ). 2007, 2(2), 228-235

HTM deki lokal çatı ve

$$\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V = \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{6}$$

VTM deki lokal çatıdır. Ayrıca $\{\delta y^i, dx^i; 1 \le i \le n\}$ lokal 1-formlarının sistemi,

$$\delta y^i = dy^i + N^i{}_j dx^j, \qquad N^i{}_j = y^k \Gamma_{kj}{}^i \tag{7}$$

olmak üzere $\{\delta_i, \partial_i; 1 \le i \le n\}$ çatısının lokal dual çatısıdır (OPROIU & PAPAGHIUC 1988).

TTM nin tanjant demeti TTTM, TTM üzerinde dikey dağılım olarak adlandırılan $\tilde{V}TTM = Çek(\tau_{TM})_*$ integrallenebilen altvektör demetine sahiptir. TTM üzerinde bir non-lineer koneksiyon $\tilde{H}TTM$ dağılımı ile tanımlı olup $\tilde{V}TTM$ nin tamamlayıcısıdır. Bu dağılıma TTM üzerinde yatay dağılım denir. Böylece

$$TTTM = \tilde{V}TTM \oplus \tilde{H}TTM$$

dir. (4) eşitliğinden,

$$TTTM = \tilde{V}VTM \oplus \tilde{H}VTM \oplus \tilde{V}HTM \oplus \tilde{H}HTM \tag{8}$$

dir. Bu direkt toplam ayrışımına uyarlanmış TTM deki lokal çatı

$$\{\tilde{\partial}\partial_i, \tilde{\delta}\partial_i, \tilde{\partial}\delta_i, \delta\delta_i; 1 \le i \le n\} \tag{9}$$

dir. Buradaki,

$$\tilde{\partial}\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{VV} = \frac{\partial}{\partial t^i} \tag{10}$$

$\tilde{V}VTM$ deki lokal çatı,

$$\tilde{\delta}\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{VH} = \frac{\partial}{\partial y^i} - z^j \Gamma_{ji}{}^h \frac{\partial}{\partial t^h} \tag{11}$$

$\tilde{H}VTM$ deki lokal çatı,

$$\tilde{\partial}\delta_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{HV} = \frac{\partial}{\partial z^i} - y^j \Gamma_{ji}{}^h \frac{\partial}{\partial t^h} \tag{12}$$

$\tilde{V}VTM$ deki lokal çatı ve

$$\tilde{\delta}\delta_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{HH} = \frac{\partial}{\partial x^i} - y^j \Gamma_{ji}{}^h \frac{\partial}{\partial y^h} - z^j \Gamma_{ji}{}^h \frac{\partial}{\partial z^h} - \{t^j \Gamma_{ji}{}^h + z^j y^k (\partial_j \Gamma_{ki}{}^h - \Gamma_{ji}{}^l \Gamma_{lk}{}^h)\} \frac{\partial}{\partial t^h} \tag{13}$$

$\tilde{H}HTM$ deki lokal çatıdır.

Ayrıca

$$\{dx^i = (dx^i)^{VV}, \delta y^i = (dx^i)^{HV}, \delta z^i = (dx^i)^{VH}, \delta t^i = (dx^i)^{HH}; 1 \le i \le n\} \tag{14}$$

lokal 1-formlarının sistemi

$$\begin{aligned} \delta y^i &= dy^i + y^k \Gamma_{kj}{}^i dx^j, \\ \delta z^i &= dz^i + z^j \Gamma_{jh}{}^i dx^h, \\ \delta t^i &= \{t^k \Gamma_{kj}{}^i + y^k z^l (\partial_l \Gamma_{kj}{}^i - \Gamma_{lh}{}^i \Gamma_{kj}{}^h)\} dx^j + z^h \Gamma_{hj}{}^i dy^j + y^k \Gamma_{kj}{}^i dz^j + dt^i \end{aligned} \tag{15}$$

olmak üzere $\{\tilde{\partial}\partial_i, \tilde{\delta}\partial_i, \tilde{\partial}\delta_i, \delta\delta_i; 1 \le i \le n\}$ çatısının uyarlanmış lokal dual çatısıdır (AYHAN vd. 2005).

Teorem 2.1 TTM manifoldunun lokal baz vektör alanları ile uyarlanmış lokal dual baz 1-formları arasında $1 \le i, j \le n$ için

$$\begin{aligned}
&i)\quad \delta t^i(\tilde{\partial}\partial_j)=\delta_j^{\ i},\\
&ii)\quad \delta y^i(\tilde{\partial}\delta_j)=\delta_j^{\ i},\\
&iii)\quad \delta z^i(\tilde{\delta}\partial_j)=\delta_j^{\ i},\\
&iv)\quad dx^i(\delta\delta_j)=\delta_j^{\ i}
\end{aligned} \tag{16}$$

olup dual baz 1-formların diğer tüm lokal baz vektör alanları üzerindeki aldıkları değer sıfırdır.

İspat: Doğrudan hesaplamalar yardımıyla

i) $dx^i(\frac{\partial}{\partial t^j})=dy^i(\frac{\partial}{\partial t^j})=dz^i(\frac{\partial}{\partial t^j})=0$ olduğundan,

$$\delta t^i(\tilde{\partial}\partial_j)=\left(\delta t^i=\{t^k\Gamma_{kj}^{\ i}+y^kz^l(\partial_l\Gamma_{kj}^{\ i}-\Gamma_{lh}^{\ i}\Gamma_{kj}^{\ h})\}dx^j+z^h\Gamma_{hj}^{\ i}dy^j+y^k\Gamma_{kj}^{\ i}dz^j+dt^i\right)(\frac{\partial}{\partial t^j})=\delta_j^{\ i}$$

dir.

ii) (i) de verilenler ve $dx^j(\frac{\partial}{\partial y^j})=0$ eşitliğinden

$$\delta y^i(\tilde{\partial}\delta_j)=\left(dy^i+y^k\Gamma_{kj}^{\ i}dx^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}-z^k\Gamma_{kj}^{\ h}\frac{\partial}{\partial t^h}\right)=\delta_j^{\ i}$$

elde edilir.

iii) (i),(ii) de verilenler ve $dx^h(\frac{\partial}{\partial z^j})=0$ olduğundan

$$\delta z^i(\tilde{\delta}\partial_j)=\left(dz^i+z^j\Gamma_{jh}^{\ i}dx^h\right)\left(\frac{\partial}{\partial z^j}-y^k\Gamma_{kj}^{\ h}\frac{\partial}{\partial t^h}\right)=\delta_j^{\ i}$$

bulunur.

iv) (i),(ii)ve (iii) de verilenlerden

$$dx^i(\delta\delta_j)=\left(dx^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}-y^j\Gamma_{ji}^{\ h}\frac{\partial}{\partial y^h}-z^j\Gamma_{ji}^{\ h}\frac{\partial}{\partial z^h}-\{t^j\Gamma_{ji}^{\ h}+z^jy^k(\partial_j\Gamma_{ki}^{\ h}-\Gamma_{ji}^{\ l}\Gamma_{lk}^{\ h})\}\frac{\partial}{\partial t^h}\right)=\delta_j^{\ i}$$

elde edilir.

TTM nin dual baz 1-formlarının diğer lokal baz vektör alanları üzerindeki değerleri sıfırdır.

Teorem 2.2 M flat semi-Riemann manifoldu ve $\Gamma_{ji}^{\ h}$ Christoffel sembolleri olmak üzere TTM manifoldu üzerindeki uyarlanmış lokal baz vektör alanlarının Lie parantez operatörü altındaki sıfırdan farklı değerleri

$$\begin{aligned}
&i)\quad [\tilde{\delta}\delta_i,\tilde{\partial}\delta_j]=\Gamma_{ji}^{\ h}\tilde{\partial}\delta_h,\\
&ii)\quad [\tilde{\delta}\delta_i,\tilde{\delta}\partial_j]=\Gamma_{ji}^{\ h}\tilde{\delta}\partial_h,\\
&iii)\quad [\tilde{\delta}\delta_i,\tilde{\partial}\partial_j]=\Gamma_{ji}^{\ h}\tilde{\partial}\partial_h
\end{aligned} \tag{17}$$

dir.

İspat: TTM manifoldu üzerinde non-lineer koneksiyon katsayıları

$N_i^{\ h}=y^j\Gamma_{ji}^{\ h},\quad Z_i^{\ h}=z^k\Gamma_{ki}^{\ h},\quad T_i^{\ h}=t^k\Gamma_{ki}^{\ h}$ olsun.

i) (12) ve (13) eşitliklerinden

SDÜ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
FEN DERGİSİ (E-DERGİ). 2007, 2(2), 228-235

$$[\widetilde{\delta}\delta_i,\widetilde{\partial}\delta_j]=[\frac{\partial}{\partial x^i}-N_i^{\ h}\frac{\partial}{\partial y^h}-Z_i^{\ h}\frac{\partial}{\partial z^h}-\{T_i^{\ h}+z^j y^l(\partial_j\Gamma_{li}^{\ h}-\Gamma_{ji}^{\ k}\Gamma_{kl}^{\ h})\}\frac{\partial}{\partial t^h},\frac{\partial}{\partial z^j}-N_j^{\ k}\frac{\partial}{\partial t^k}]$$

$$=-\frac{\partial\left(N_j^{\ k}\right)}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial t^k}+N_i^{\ h}\frac{\partial\left(N_j^{\ k}\right)}{\partial y^h}\frac{\partial}{\partial t^k}-\left\{-\frac{\partial\left(Z_i^{\ h}\right)}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial z^h}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\left(z^j\right)}{\partial z^j}y^l(\partial_j\Gamma_{li}^{\ h}-\Gamma_{ji}^{\ k}\Gamma_{kl}^{\ h})+N_j^{\ k}\frac{\partial\left(T_i^{\ h}\right)}{\partial t^k}\right)\frac{\partial}{\partial t^h}\right\}$$

$$=\Gamma_{ji}^{\ h}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z^h}-y^l\Gamma_{hl}^{\ k}\frac{\partial}{\partial t^k}\right)}_{\widetilde{\partial}\delta_h}+y^l\underbrace{\left(\partial_j\Gamma_{li}^{\ h}-\partial_i\Gamma_{lj}^{\ h}+\Gamma_{li}^{\ k}\Gamma_{kj}^{\ h}-\Gamma_{ji}^{\ k}\Gamma_{ki}^{\ h}\right)}_{R_{lji}^{\ h}}\frac{\partial}{\partial t^h}$$

M flat semi-Riemann manifoldu olduğu için Riemann eğrilik tensörü $R_{lji}^{\ h}$ sıfırdır. Bu yüzden

$[\widetilde{\delta}\delta_i,\widetilde{\partial}\delta_j]=\Gamma_{ji}^{\ h}\widetilde{\partial}\delta_h$ olur.

ii) (11) ve (13) eşitliklerinden

$$[\widetilde{\delta}\delta_i,\widetilde{\delta}\partial_j]=[\frac{\partial}{\partial x^i}-N_i^{\ h}\frac{\partial}{\partial y^h}-Z_i^{\ h}\frac{\partial}{\partial z^h}-\{T_i^{\ h}+z^j y^l(\partial_j\Gamma_{li}^{\ h}-\Gamma_{ji}^{\ k}\Gamma_{kl}^{\ h})\}\frac{\partial}{\partial t^h},\frac{\partial}{\partial y^j}-Z_j^{\ k}\frac{\partial}{\partial t^k}]$$

$$=\Gamma_{ji}^{\ h}\widetilde{\partial}\delta_h+z^l R_{lji}^{\ h}\widetilde{\partial}\partial_h,\qquad R_{lji}^{\ h}=0$$

$$=\Gamma_{ji}^{\ h}\widetilde{\partial}\delta_h$$

olur.

iii) (10) ve (13) eşitliklerinden

$$[\widetilde{\delta}\delta_i,\widetilde{\partial}\partial_j]=[\frac{\partial}{\partial x^i}-N_i^{\ h}\frac{\partial}{\partial y^h}-Z_i^{\ h}\frac{\partial}{\partial z^h}-\{T_i^{\ h}+z^j y^l(\partial_j\Gamma_{li}^{\ h}-\Gamma_{ji}^{\ k}\Gamma_{kl}^{\ h})\}\frac{\partial}{\partial t^h},\frac{\partial}{\partial t^j}]$$

$$=\Gamma_{ji}^{\ h}\widetilde{\partial}\partial_h$$

bulunur. Benzer hesaplamalar yardımıyla diğer baz vektör alanlarının farklı ikili gruplarının Lie parantez operatörü altında almış oldukları değerlerin sıfır olduğu görülebilir.

3. TTM ÜZERİNDE g^{CC} SEMI-RIEMANN METRİĞİ

Bu bölümde (M,g) flat semi-Riemann manifoldunun double tanjant demeti üzerinde elde edilen g^{CC} nin bazı şartlar altında g^{HH} ye eşit olduğu gösterildi ve TTM nin uyarlanmış çatısına göre bileşenler cinsinden ifade edildi. Ayrıca g^{CC} nin TTM üzerinde bir semi-Riemann metrik olduğu gösterildi. Son olarak (TTM, g^{CC}) semi-Riemann manifoldunun $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonu bileşenler cinsinden hesaplandı.

Teorem 3.1 g, M de bir semi-Riemann metrik, ∇ ve $\overline{\nabla}$ sırasıyla M de ve TM de Levi-Civita koneksiyonları ise $g^{CC}=g^{HH}$ dır.

İspat: M deki (0,2) tipindeki bir g metrik tensörünün TM ye yatay yükseltilmişi

$$g^H=g^C-\gamma(\nabla g) \tag{18}$$

olup koneksiyonun metrikle bağdaşabilme özeliğinden

$$g^H=g^C \tag{19}$$

dir (YANO & ISHIHARA 1970). (19) eşitliğinden

$$g^{HH}=g^{CH} \tag{20}$$

dır. TM deki (0,2) tipindeki g^C metriğinin TTM ye yatay yükseltilmişi

$$g^{HH}=g^{CH}=g^{CC}-\tilde{\gamma}(\overline{\nabla}g^C)$$

olup $\overline{\nabla}$ nın g^C metriği ile bağdaşabilme özeliğinden $\overline{\nabla}g^C=0$ dır. Bu nedenle $g^{HH}=g^{CC}$ dır.

Teorem 3.2 g, M de bir semi-Riemann metrik, ∇ ve $\overline{\nabla}$ sırasıyla M de ve TM de Levi-Civita koneksiyonları olmak üzere g nin ikinci mertebeden yatay yükseltilmişi g^{CC} nin TTM nin uyarlanmış çatısına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$g^{CC}=2(g_{ij})^{VV}\delta z^i\delta y^j+2(g_{ij})^{VV}dx^i\delta t^j \tag{21}$$

dir.

İspat: : M manifoldu üzerinde $P\otimes Q$ tensör çarpımının yatay yükseltilmişi

$$(P\otimes Q)^H=P^V\otimes Q^H+P^H\otimes Q^V \tag{22}$$

ve ∇, M de Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere f fonksiyonun yatay yükseltilmişi

$$f^H=0 \tag{23}$$

dır (YANO & ISHIHARA 1970). (22) eşitliğinden yararlanarak

$$(P\otimes Q)^{HH}=P^{VV}\otimes Q^{HH}+P^{VH}\otimes Q^{HV}+P^{HV}\otimes Q^{VH}+P^{HH}\otimes Q^{VV} \tag{24}$$

bulunur. (23) den

$$f^{HV}=f^{HH}=0 \tag{25}$$

dir.
Ayrıca

$$f^{VH}=0 \tag{26}$$

dır (AYHAN vd. 2005). (14), (24), (25) ve (26) eşitliklerinden

$$g^{CC}=g^{HH}=2(g_{ij})^{VV}\delta z^i\delta y^j+2(g_{ij})^{VV}dx^i\delta t^j$$

elde edilir.

Teorem 3.3 (M,g) semi-Riemann manifoldu ise (TM,g^{CC}) semi-Riemann manifoldudur.

İspat: TTM C^∞ manifoldu üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(TTM)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(TTM,R)$ olmak üzere

$$g^{CC}:\chi(TTM)\times\chi(TTM)\to C^\infty(TTM,R) \tag{27}$$

dönüşümü (16) daki eşitlikler göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g^{CC}(X^{VV},Y^{HH})&=g^{CC}(X^{HH},Y^{VV})=(g(X,Y))^{VV}\\ g^{CC}(X^{VH},Y^{HV})&=g^{CC}(X^{HV},Y^{VH})=(g(X,Y))^{VV}\end{aligned} \tag{28}$$

olup diğer vektör alanları üzerindeki değerleri sıfır olacak şekilde tanımlıdır.
(TM,g^{CC}) nin semi-Riemann manifoldu olması için g^{CC} nin aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.
i) 2-Lineerlik: $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ vektör alanlarının ikinci mertebeden yükseltilmişleri $\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\in\chi(TTM)$ olsun. $\alpha,\beta\in R$ için $\alpha\tilde{X}+\beta\tilde{Y}$ vektör alanın (8) deki direkt toplam ayrışımı cinsinden ifadesi

SDÜ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
FEN DERGİSİ (E-DERGİ). 2007, 2(2), 228-235

$$\alpha\widetilde{X}+\beta\widetilde{Y}=(\alpha X+\beta Y)^{VV}+(\alpha X+\beta Y)^{VH}+(\alpha X+\beta Y)^{HV}+(\alpha X+\beta Y)^{HH}$$

olup (28) den

$$g^{CC}(\alpha\widetilde{X}+\beta\widetilde{Y},\widetilde{Z})=g^{CC}\left(\begin{Bmatrix}(\alpha X+\beta Y)^{VV}+(\alpha X+\beta Y)^{VH}+\\+(\alpha X+\beta Y)^{HV}+(\alpha X+\beta Y)^{HH}\end{Bmatrix},Z^{VV}+Z^{VH}+Z^{HV}+Z^{HH}\right)$$
$$=\alpha g^{CC}(\widetilde{X},\widetilde{Z})+\beta g^{CC}(\widetilde{Y},\widetilde{Z})$$

g^{CC} 1. yere göre lineerdir. Benzer işlemler yardımıyla 2. yere göre de lineer olduğu görülebilir.

ii) *<u>Simetriklik</u>* : $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ (8) deki direkt toplam ayrışımı kullanılarak

$$g^{CC}(\widetilde{X},\widetilde{Y})=g^{CC}(\widetilde{Y},\widetilde{X})$$

olduğundan g^{CC} metriği simetriktir.

iii) *<u>Non-dejenerelik</u>* : $\forall\widetilde{X}\in\chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y}=Y^{VV}$ için

$$g^{CC}(\widetilde{X},Y^{VV})=g^{CC}(X^{VV}+X^{VH}+X^{HV}+X^{HH},Y^{VV})$$
$$=g^{CC}(X^{HH},Y^{VV})=\left(g(X,Y)\right)^{VV}=0$$

eşitliğinden $Y^{VV}=0$ elde edilir. Benzer işlemler yardımıyla Y^{VH},Y^{HV},Y^{HH} vektör alanları için de sıfır sonucu elde edilir. Böylece

$$\forall\widetilde{X}\in\chi(TTM)\text{ için } g^{CC}(\widetilde{X},\widetilde{Y})=0 \text{ iken } \widetilde{Y}=0$$

olduğundan g^{CC} metriği non-dejeneredir.

Buna göre (TTM, g^{CC}) bir semi-Riemann manifoldudur.

Teorem 3.4 (M,g) flat semi-Riemann manifoldu ve $\widetilde{\nabla}$, (TTM, g^{CC}) semi-Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu ise $\widetilde{\nabla}$ nin uyarlanmış lokal bazlara göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i}\widetilde{\delta\delta}_j=\Gamma_{ij}^k\widetilde{\delta\delta}_k,\quad \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i}\widetilde{\partial\delta}_j=\Gamma_{ij}^k\widetilde{\partial\delta}_k,$$
$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i}\widetilde{\delta\partial}_j=\Gamma_{ij}^k\widetilde{\delta\partial}_k,\quad \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i}\widetilde{\partial\partial}_j=\Gamma_{ij}^k\widetilde{\partial\partial}_k,$$
$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\delta\partial}_i}\widetilde{\delta\delta}_j=-\Gamma_{ij}^k\widetilde{\partial\partial}_k$$

olup diğer tüm bileşenler sıfırdır.

İspat: $1\le i,j,k\le n$ için

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i}\widetilde{\partial\partial}_j=\widetilde{\Gamma}_{i3n+j}^{k}\widetilde{\delta\delta}_k+\widetilde{\Gamma}_{i3n+j}^{n+k}\widetilde{\partial\delta}_k+\widetilde{\Gamma}_{i3n+j}^{2n+k}\widetilde{\delta\partial}_k+\widetilde{\Gamma}_{i3n+j}^{3n+k}\widetilde{\partial\partial}_k$$

olsun. Kozsul formülünden

$$2g^{CC}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i}\widetilde{\partial\partial}_j,\widetilde{\delta\delta}_h)=\widetilde{\delta\delta}_i g^{CC}(\widetilde{\partial\partial}_j,\widetilde{\delta\delta}_h)+\widetilde{\partial\partial}_j g^{CC}(\widetilde{\delta\delta}_h,\widetilde{\delta\delta}_i)+\widetilde{\delta\delta}_h g^{CC}(\widetilde{\delta\delta}_i,\widetilde{\partial\partial}_j)-$$
$$-g^{CC}\left(\widetilde{\delta\delta}_i,[\widetilde{\partial\partial}_j,\widetilde{\delta\delta}_h]\right)+g^{CC}\left(\widetilde{\partial\partial}_j,[\widetilde{\delta\delta}_h,\widetilde{\delta\delta}_i]\right)+g^{CC}\left(\widetilde{\delta\delta}_h,[\widetilde{\delta\delta}_i,\widetilde{\partial\partial}_j]\right)$$

olur. (16), (17), (21) ve (28) eşitliklerinden

$$2g^{CC}\left(\tilde{\Gamma}_{i3n+j}{}^{3n+k}\tilde{\partial\partial}_k,\tilde{\delta\delta}_h\right)=\partial_i g_{jh}-\partial_j g_{hi}+\underbrace{g_{ki}\Gamma_{jh}{}^k+g_{hk}\Gamma_{ji}{}^k}_{\partial_j g_{hi}}$$

$$2g_{kh}\tilde{\Gamma}_{i3n+j}{}^{3n+k}=\partial_i g_{jh}+\partial_j g_{hi}-\partial_j g_{hi}$$

$$\tilde{\Gamma}_{i3n+j}{}^{3n+k}=\frac{1}{2}g^{hk}\left\{\partial_i g_{jh}+\partial_j g_{hi}-\partial_j g_{hi}\right\}$$

$$\tilde{\Gamma}_{i3n+j}{}^{3n+k}=\Gamma_{ij}{}^k$$

olur. $\tilde{\nabla}_{\tilde{\delta\delta}_i}\tilde{\partial\partial}_j$, $\tilde{\partial\partial}_h,\tilde{\delta\partial}_h$ ve $\tilde{\partial\delta}_h$ ile Kozsul formülünde işleme sokulduğunda sonuç sıfırdır.

Böylece $\tilde{\nabla}_{\tilde{\delta\delta}_i}\tilde{\partial\partial}_j=\Gamma_{ij}{}^k\tilde{\partial\partial}_k$ olduğu görülür. $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun diğer bileşenleri de benzer hesaplamalar yardımıyla elde edilebilir.

KAYNAKLAR

AYHAN, İ., 1997. Derivasyonlar ve tensör alanlarının ikinci mertebeden liftleri, Yüksek Lisans Tezi, PAÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli, 67s

AYHAN, İ., ÇÖKEN, A., C., CİVELEK, Ş., 2005. Tanjant demet üzerindeki horizontal liftler, *III. Geometri Sempozyumu*, Osmangazi Üniversitesi, 4-6 Temmuz 2005, Eskişehir

AYHAN, İ., 2006. Semi-Riemann manifoldların tanjant ve kotanjant demetlerinin geometrisi üzerine, Doktora Tezi, S.D.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, 142s

ESİN, E., CİVELEK, Ş., 1989. The lifts on the second order tangent bundles, *Jour. Mathematics and Stattics Faculty of Arts and Science. Gazi University*, Vol.2, 117-135

OPROIU, V., PAPAGHIUC, N., 1998. On the geometry of tangent bundle of a (pseudo)-Riemannian manifold, *Annale Stiint. University Al. I. Cuza Iasi*, Ser. Noua, Mat., 36, No.3, 265-276

YANO, K., ISHIHARA, S., 1973. *Tangent and Cotangent Bundles*, Marcel Decker. Inc., New York, 392p,