

**RİJİT ZEMİN ÜZERİNE OTURMUŞ ÖNGERİLMELİ PLAĞIN ZORLANMIŞ  
TİTREŞİM PROBLEMİNİN SONLU ELEMAN MODELLENMESİ**

**Mustafa ERÖZ, Abdullah YILDIZ**

Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 54187,  
Sakarya, Türkiye

e-mail: meroz@sakarya.edu.tr, yildiz@sakarya.edu.tr

*Alınış: 20 Temmuz 2007, Kabul: 26 Eylül 2007*

**Özet:** Rijit yarı-düzlem üzerine oturmuş öngerilmeli şerit plağın zorlanmış titreşim probleminin üç boyutlu doğrusallaştırılmış elastodinamik teorisi çerçevesinde matematik formülasyonu verilmiştir. Bu formülasyona karşılık gelen sınır-değer probleminin varyasyonel ifadesi oluşturulmuştur. Bu ifadede yer alan fonksiyonelin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden -virtüel iş prensibi esasında uygun denklem ve sınır koşullarının elde edilmesi ispat edilmiştir. Daha sonra bu koşullardan yararlanılarak şerit levhanın kapsadığı bölge sonlu elemanlara bölünerek problemin sonlu eleman ( SE ) modellenmesi yapılmıştır.

**Anahtar kelimeler.** Elastodinamik denklemleri; Ön gerilme; Harmonik yük; Zorlanmış titreşim; Sonlu elemanlar yöntemi.

**Mathematics Subject Classifications (2000):** 35A15, 65N30

**FINITE ELEMENT FORMULATION OF FORCED VIBRATION PROBLEM  
OF A PRESTRETCHED PLATE RESTING ON A RIGID FOUNDATION**

**Abstract:** In the framework of the three-dimensional linearized theory of elastodynamics mathematical formulation of the forced vibration of a prestretched plate lay on a rigid half-plane is given. The variational formulation of corresponding boundary-value problem is constructed. The first variational of the functional in the variational statement is equated to zero. In the framework of the virtual work principle it is proved that appropriate equations and boundary conditions are derived. Finally, using these conditions finite element formulation of the prestretched plate is done.

**Key words.** Elastodynamics equations; Initial stress; Harmonic load; Forced vibration; Finite element method.

## GİRİŞ

Öngerilmeli ortamlara ait elastodinamik problemleri temel bilimlerde, mühendislikte ve uygulamalı matematiğin birçok alanında ortaya çıkmaktadır. 20. yüzyılın ikinci yarısından itibaren başlayan çalışmalar günümüzde de teorik ve deneysel olarak devam etmektedir. 1986 öncesi elde edilen sonuçların analizi (GUZ 1986a, GUZ 1986b) de yapılmıştır. Daha sonraki araştırmalar (AKBAROV&OZISIK 2003, OZISIK&AKBAROV 2003, GUZ 2002) de verilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda öngerilmeler

altında çok katmanlı ortamlarda dinamik gerilme ifadeleri teorik ve deneysel olarak gelişmektedir (RUDNITSKY&DIKBTARYARUK 2002, MATNIAK 2003).

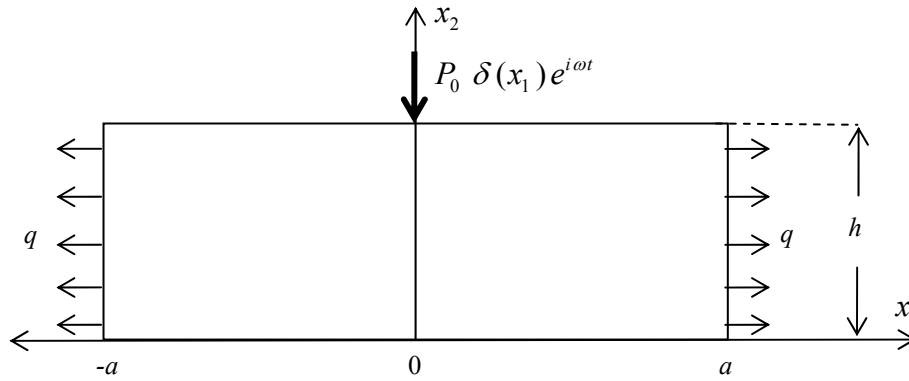
Bu çalışmada yukarıda bahsedilen alanlara ait olan ve analitik çözümü olmayan bir sınır değer problemi ortaya konulmuş ve problemin sayısal çözümlenebilmesi için SE modellemesi yapılmıştır.

### PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Problem rijit zemin üzerine oturtulmuş öngerilmeli şerit plağın zorlanmış titreşimine aittir. Sonlu bölgeye sahip şerit plak kartezyen koordinatlarda

$$B = \{ (x_1, x_2) : -a \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq h \} \quad (1)$$

bölgesini ve rijit yarı-düzlem ise  $\{ (x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 \leq 0 \}$  bölgesini kaplamaktadır. Şerit plağın lineer elastik malzemeden yapıldığını, homojen ve izotrop olduğunu kabul edeceğiz. Şerit plağın zemin üzerine oturtulmadan önce kenarlarından şiddeti  $q$  olan normal kuvvetlerle gerilmekte olduğunu farz edeceğiz. Plağın üst yüzeyine uygulanan zamana göre harmonik olan noktasal yük  $P_0 \delta(x_1) e^{i\omega t}$  formundadır. Burada düzlem şekil değiştirme hali incelenmiştir.



Şekil 1. Rijit yarı-düzlemin üzerine oturmuş sonlu bölgeye sahip plağın geometrisi.

Plak zemin üzerine oturtulduktan sonra ise plağın üst serbest yüzeyine zamana göre harmonik tekil  $P_0$  kuvveti etki etmektedir. Bu durumda şerit plağın hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılır (GUZ 1986a):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + q \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad i = 1,2, j = 1,2 \quad (2)$$

Burada  $\rho_0$  plağın doğal haldeki yoğunluğunu temsil etmektedir.  $u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$  ve  $u_2 = u_2(x_1, x_2, t)$  fonksiyonları sırasıyla  $x_1$  ve  $x_2$  istikametindeki yerdeğiştirmeleri göstermektedir.  $\lambda$  ve  $\mu$  Láme sabitleri olmak üzere ve izotrop sıkıştırılabilir malzemeler için  $\sigma$

$$\sigma = \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \}^T \quad (3)$$

gerilme tansörünü ve  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12} \}^T \quad (4)$$

şekil değiştirme tansörünü temsil etmek üzere aşağıdaki bünye bağıntıları verebiliriz:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad , \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \quad (5)$$

(5) denkleminde  $\delta_{ij}$  Kronecker deltasını temsil etmektedir:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases} \quad (6)$$

$\varepsilon$  şekil değiştirme tansörününün  $\varepsilon_{ij}$  elemanları

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

ile belirlenir.  $E$  elastisite modülü ve  $\nu$  Poisson oranı ile  $\lambda$  ve  $\mu$  Láme sabitleri arasında

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (8)$$

ilişkileri mevcuttur. Şimdi sınır koşullarını da vererek problemimizi ortaya koyalım: (1) ile verilen  $B$  bölgesinde (2) denklemleri sağlanmaktadır. Şimdi sınır koşullarını ele alalım. Yukarıda söylenenlere göre

$$\begin{aligned} u_1|_{x_2=0} &= 0 \quad , \quad u_2|_{x_2=0} = 0 \\ \left( q \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{11} \right) \Big|_{x_1=\pm a} &= 0 \quad , \quad \left( q \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \right) \Big|_{x_1=\pm a} = 0 \\ \sigma_{21}|_{x_2=h} &= 0 \quad , \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = P_0 \delta(x_1) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (9)$$

sınır koşulları sağlanmalıdır. Uygulanan noktasal yük zamana göre harmonik olduğundan bütün bağımlı değişkenler de harmonik olacak ve

$$\{ u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} \} = \{ \hat{u}_i, \hat{\sigma}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij} \} e^{i\omega t} \quad (10)$$

biçiminde gösterilebilecektir. Buradan itibaren  $\hat{u}_i$ ,  $\hat{\sigma}_{ij}$  ve  $\hat{\varepsilon}_{ij}$  yi kullanacak ve  $e^{i\omega t}$  çarpanını düşüreceğiz. Gösterimde kolaylık açısından “ ^ ” ifadesini göz ardı ederek

yazmayacağız. (5) ve (7) ifadelerini (2) denkleminde kullanarak yerdeğiştirmeye bağlı lineerleştirilmiş hareket denklemlerini

$$(\lambda + 2\mu + q) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = -\rho_0 \omega^2 u_1 \quad (11)$$

$$(\mu + q) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = -\rho_0 \omega^2 u_2 \quad (12)$$

biçiminde elde ederiz.

### SONLU ELEMAN MODELLEMESİ

$$\hat{x}_1 = \frac{x_1}{h} \quad , \quad \hat{x}_2 = \frac{x_2}{h} \quad (13)$$

koordinat dönüşümünü yaparak boyutsuz koordinatlara geçelim. Alışılmış sonlu eleman yöntemi gereğince (2) denklemlerinde (13) dönüşümünü yapıp denklemin her iki yanını  $h^2$  ile çarparak

$$h \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \hat{x}_1} + h \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \hat{x}_2} + q \frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}_1^2} = -\rho_0 \omega^2 h^2 u_1 \quad (14)$$

$$h \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \hat{x}_1} + h \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \hat{x}_2} + q \frac{\partial^2 u_2}{\partial \hat{x}_1^2} = -\rho_0 \omega^2 h^2 u_2 \quad (15)$$

denklemlerine ulaşırız. (13) dönüşümü altında (9) sınır koşulları

$$u_1|_{\hat{x}_2=0} = 0 \quad , \quad u_2|_{\hat{x}_2=0} = 0$$

$$\left( q \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + \sigma_{11} \right) \Big|_{\hat{x}_1=\pm a/h} = 0 \quad , \quad \left( q \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} + \sigma_{12} \right) \Big|_{\hat{x}_1=\pm a/h} = 0 \quad (16)$$

$$\sigma_{21}|_{\hat{x}_2=1} = 0 \quad , \quad \sigma_{22}|_{\hat{x}_2=1} = P_0 \delta(h \hat{x}_1) e^{i\omega t}$$

biçiminde yazılacaktır. (14)-(15) denklemlerini  $v_1 = v_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  ve  $v_2 = v_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  test fonksiyonları ile çarpıp taraf tarafa topladıktan sonra

$$\hat{B} = \{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2) : -a/h \leq \hat{x}_1 \leq a/h \quad , \quad 0 \leq \hat{x}_2 \leq 1 \} \quad (17)$$

bölgesi üzerinde integre edelim:

$$\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[ h \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \hat{x}_1} v_1 + h \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \hat{x}_1} v_2 + h \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \hat{x}_2} v_1 + h \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \hat{x}_2} v_2 + q \frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}_1^2} v_1 + q \frac{\partial^2 u_2}{\partial \hat{x}_1^2} v_2 \right] d \hat{x}_1 d \hat{x}_2$$

$$= - \int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \rho_0 \omega^2 h^2 (u_1 v_1 + u_2 v_2) d \hat{x}_1 d \hat{x}_2 \quad (18)$$

(18) denkleminin sol tarafında integral içi ifadelerde  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $A \subset \mathfrak{R}^n$  ve  $\vec{n}$  dış birim normal vektör olmak üzere

$$\int_A \frac{\partial p(\vec{x})}{\partial x_k} q(\vec{x}) d \vec{x} = \int_{\partial A} p(\vec{x}) q(\vec{x}) \cos(\vec{n}, x_k) d s - \int_A p(\vec{x}) \frac{\partial q(\vec{x})}{\partial x_k} d \vec{x} \quad (19)$$

kısmi integrasyon formülünü kullanıp türev aktararak sınır terimlerini ve bölge integrallerini bir araya toplarsak (18) integrali

$$\int_{\partial \hat{B}} [h \sigma_{11} v_1 \cos(\vec{n}, \hat{x}_1) + h \sigma_{21} v_2 \cos(\vec{n}, \hat{x}_1) + h \sigma_{12} v_1 \cos(\vec{n}, \hat{x}_2) + h \sigma_{22} v_2 \cos(\vec{n}, \hat{x}_2)$$

$$+ q \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} v_1 \cos(\vec{n}, \hat{x}_1) + q \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} v_2 \cos(\vec{n}, \hat{x}_1)] d s$$

$$- \int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[ h \sigma_{11} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + h \sigma_{21} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} + h \sigma_{12} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_2} + h \sigma_{22} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} + q \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + q \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} \right] d \hat{x}_1 d \hat{x}_2$$

$$= - \int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \rho_0 \omega^2 h^2 (u_1 v_1 + u_2 v_2) d \hat{x}_1 d \hat{x}_2 \quad (20)$$

biçiminde yazılır. (19) eşitliğinde  $\cos(\vec{n}, x_k)$ ,  $\vec{n}$  dış normal birim vektörü ile  $x_k$  vektörü arasındaki açının kosinüsünü belirtmektedir. (20) denkleminde bölge üzerindeki integralleri bir araya toplar ve

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{in}^0 \frac{\partial u_j}{\partial \hat{x}_n}, \quad \sigma_{11}^0 = q \quad \text{ve} \quad i \neq 1, n \neq 1 \quad \text{için} \quad \sigma_{in}^0 = 0 \quad (21)$$

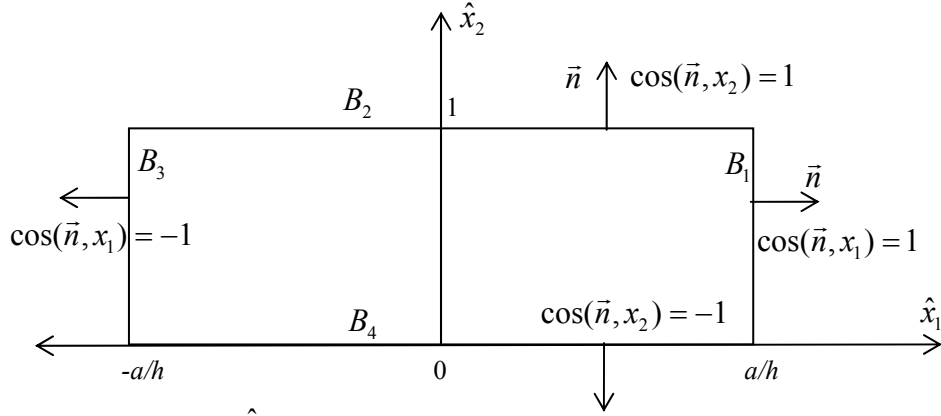
ifadesini tanımlarsak, bu denklemi

$$\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[ h T_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial \hat{x}_i} - \rho_0 \omega^2 h^2 u_i v_i \right] d \hat{x}_1 d \hat{x}_2$$

$$= \int_{\partial \hat{B}} [h \sigma_{11} v_1 \cos(\vec{n}, \hat{x}_1) + h \sigma_{21} v_2 \cos(\vec{n}, \hat{x}_1) + h \sigma_{12} v_1 \cos(\vec{n}, \hat{x}_2) + h \sigma_{22} v_2 \cos(\vec{n}, \hat{x}_2)$$

$$+ q \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} v_1 \cos(\vec{n}, \hat{x}_1) + q \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} v_2 \cos(\vec{n}, \hat{x}_1)] d s \quad (22)$$

yapısında yazabiliriz. Şimdi (22) denkleminin sağ tarafında bulunan sınır integralini inceleyelim:  $\partial \hat{B}$  sınırını  $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$  biçiminde şekil 2 deki gibi parçalayalım.



Şekil 2.  $\hat{B}$  bölgesinin parçalanışı ve doğrultu kosinüsleri.

(22) denkleminin sağ tarafını düzenleyip yazalım:

$$\int_{\partial \hat{B}} \{ \cos(\vec{n}, \hat{x}_1) [h\sigma_{11}v_1 + h\sigma_{21}v_2 + q \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} v_1 + q \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} v_2] + \cos(\vec{n}, \hat{x}_2) [h\sigma_{12}v_1 + h\sigma_{22}v_2] \} ds \quad (23)$$

Bu durumda  $B_1 = \{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2) : \hat{x}_1 = a/h, 0 \leq \hat{x}_2 \leq 1 \}$  için

$$\int_0^1 1 \cdot [h\sigma_{11}v_1 + h\sigma_{21}v_2 + q \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} v_1 + q \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} v_2] d\hat{x}_2 \quad (24)$$

$B_2 = \{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2) : -a/h \leq \hat{x}_1 \leq a/h, \hat{x}_2 = 1 \}$  için

$$\int_{-a/h}^{a/h} 1 \cdot [h\sigma_{12}v_1 + h\sigma_{22}v_2] d\hat{x}_1 \quad (25)$$

$B_3 = \{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2) : \hat{x}_1 = -a/h, 0 \leq \hat{x}_2 \leq 1 \}$  için

$$\int_0^1 (-1) [h\sigma_{11}v_1 + h\sigma_{21}v_2 + q \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} v_1 + q \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} v_2] d\hat{x}_2 \quad (26)$$

ve  $B_4 = \{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2) : -a/h \leq \hat{x}_1 \leq a/h, \hat{x}_2 = 0 \}$  için

$$\int_{-a/h}^{a/h} (-1) [h\sigma_{12}v_1 + h\sigma_{22}v_2] d\hat{x}_1 \quad (27)$$

integrallerini elde ederiz. (16) sınır koşullarını göz önüne alarak (24)-(27) integrallerini hesaplayıp toplarsak

$$\int_{-a/h}^{a/h} h\sigma_{22} \Big|_{\hat{x}_2=1}^{v_2} \Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 \quad (28)$$

integraline ulaşırız. Böylece (22) denklemini

$$\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[ h\sigma_{11} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + h\sigma_{21} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} + h\sigma_{12} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_2} + h\sigma_{22} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} + q \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + q \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} - \rho_0 \omega^2 h^2 (u_1 v_1 + u_2 v_2) \right] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \int_{-a/h}^{a/h} h\sigma_{22} \Big|_{\hat{x}_2=1}^{v_2} \Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 \quad (29)$$

biçiminde yazarız. (5) ve (7) gerilme-yer değiştirme bağıntıları (13) dönüşümü göz önüne alındığında açık olarak

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{h} \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + \lambda \frac{1}{h} \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \\ \sigma_{22} &= \lambda \frac{1}{h} \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{h} \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \\ \sigma_{12} &= \mu \frac{1}{h} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

biçiminde olacaktır. Ayrıca (29) denkleminin sağ tarafı,

$$\sigma_{22} \Big|_{\hat{x}_2=1} = P_0 \delta(h\hat{x}_1) e^{i\omega t} \quad (31)$$

sınır koşulu ve

$$\delta(a(x)) = \frac{1}{a'(x)} \delta(x) \quad (32)$$

özellliği kullanılarak

$$\int_{-a/h}^{a/h} P_0 \delta(\hat{x}_1) v_2 \Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 \quad (33)$$

biçiminde yazılır. (30) ifadelerini (29) eşitliğinde yerlerine yazıp, denklemin sağ tarafı için (33) ifadesini kullandıktan sonra yerdeğistirmeler cinsinden

$$\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[ \left\{ (\lambda + 2\mu + q) \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + \left\{ \mu \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + (\mu + q) \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} \right. \\ \left. + \mu \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_2} + \left\{ \lambda \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} - \rho_0 \omega^2 h^2 (u_1 v_1 + u_2 v_2) \right] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\ = \int_{-a/h}^{a/h} P_0 \delta(\hat{x}_1) v_2 \Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 \quad (34)$$

denkleme ulaşırız. (36) denkleminin her iki yanını  $\mu$ -ye bölerek

$$\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[ \left\{ \left( \frac{q}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \left( \frac{q}{\mu} + 1 \right) \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_2} + \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + \left( \frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\rho_0 \omega^2 h^2}{\mu} (u_1 v_1 + u_2 v_2) \right] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\ = \int_{-a/h}^{a/h} \frac{P_0}{\mu} \delta(\hat{x}_1) v_2 \Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 \quad (35)$$

denkleme ulaşırız. (35) varyasyonel denklemi ile  $a(u, v)$  bilineer formunu ve  $l(v)$  lineer formunu elde etmiş oluruz.

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \quad (36)$$

enine dalga ( distorsiyon ) hızı ve

$$\Omega = \frac{\omega h}{c_2} \quad (37)$$

boyutsuz frekans ifadesini tanımlayıp,  $J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - l(u)$ ,  $u = u(u_1, u_2)$  toplam enerji fonksiyoneli

$$J(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[ \frac{q}{\mu} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right)^2 \right] + \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right\}^2 + 2 \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right. \\ \left. + \left( \frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right)^2 \right] - \Omega^2 (u_1^2 + u_2^2) \right] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\ - \int_{-a/h}^{a/h} \frac{P_0}{\mu} \delta(\hat{x}_1) u_2 \Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 \quad (38)$$

biçiminde elde edilir.

Varyasyonel hesaptan bilindiği üzere (CHERKAEV&CHERKAEV 2003), (38) ifadesi ile verilen  $J(u)$  toplam enerji potansiyelinin birinci varyasyonunu sıfıra eşitleyerek



(11) - (12) lineerleştirilmiş hareket denklemlerine ve (16) sınır koşullarına ulaşmalıyız. Bunun için

$$\delta J(u_1, u_2) = 0 \quad (39)$$

denklemini kullanacağız. (39) ifadesinde  $\delta u_1$  ve  $\delta u_2$  içeren integral içi ifadelerin sıfıra eşitliğinden

$$\begin{aligned} -u_1 \rho_0 \omega^2 &= \frac{q}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \left( \frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -u_2 \rho_0 \omega^2 &= \frac{q}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left( \frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \end{aligned} \quad (40)$$

denklemlerini,

$$\left( q \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{11} \right) \Big|_{\hat{x}_1 = \pm a/h} = 0 \quad \text{ve} \quad \sigma_{12} \Big|_{\hat{x}_2 = 1} = 0 \quad (41)$$

sınır koşullarını ve  $\delta u_2$  içeren integral içi ifadelerin sıfıra eşitliğinden

$$\left( q \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \right) \Big|_{\hat{x}_1 = \pm a/h} = 0 \quad \text{ve} \quad \sigma_{22} \Big|_{\hat{x}_2 = 1} = P_0 \delta(\hat{x}_1) \quad (42)$$

sınır koşullarını elde ederiz. (40) denklemlerine ulaşırken kullandığımız (38) fonksiyoneli oluştururken  $\mu$ -ye bölünmüş (35) denklemini baz aldığımızı hatırlayalım. Dolayısıyla toplam enerji fonksiyoneli (34) denklemini ile oluşturulursa (2) lineerleştirilmiş hareket denklemlerine ulaşırız.

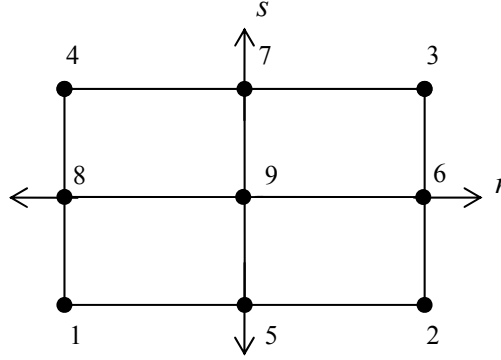
Ele alınan bölgede sağlanan  $J(u)$  toplam enerji potansiyeli Rayleigh-Ritz metodu kullanılarak minimize edilecektir. Bunun için  $\hat{B}$  bölgesi sonlu adet  $B_i$  alt bölgesine ayrılır ve yerdeğiştirme esaslı sonlu eleman formülasyonu yapıldığından her sonlu elemanda aranan fonksiyonların sadece yerdeğiştirmeler olduğu kabul edilir. Buna göre  $e$ . inci sonlu elemanda

$$u_1^{(e)} = \sum_{k=1}^M a_k N_k(r, s) \quad (43)$$

$$u_2^{(e)} = \sum_{k=1}^M b_k N_k(r, s) \quad (44)$$

şeklinde seçilir. Burada  $M$  bir sonlu elemandaki düğüm noktası sayısıdır.  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  birim karesi üzerinde tanımlı  $N_k(r, s)$  şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned}
N_1(r,s) &= \frac{1}{4}(r^2 - r)(s^2 - s) & N_2(r,s) &= \frac{1}{4}(r^2 + r)(s^2 - s) & N_3(r,s) &= \frac{1}{4}(r^2 + r)(s^2 + s) \\
N_4(r,s) &= \frac{1}{4}(r^2 - r)(s^2 + s) & N_5(r,s) &= -\frac{1}{2}(r^2 - 1)(s^2 - s) & N_6(r,s) &= -\frac{1}{2}(r^2 + r)(s^2 - 1) \\
N_7(r,s) &= -\frac{1}{2}(r^2 - 1)(s^2 + s) & N_8(r,s) &= -\frac{1}{2}(r^2 - r)(s^2 - 1) & N_9(r,s) &= (r^2 - 1)(s^2 - 1)
\end{aligned} \tag{45}$$



Şekil 3.  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  birim karesi üzerinde bir sonlu eleman için alınan düğüm noktalarının sıralanışı.

biçiminde verilir. (43) ve (44) denklemlerini (38) fonksiyoneline yerine yazarak

$$Au = f \tag{46}$$

formunda Rayleigh-Ritz tekniği lineer cebirsel denklem takımını elde ederiz. Burada  $A$  katılık matrisi olup  $e$ . inci sonlu eleman için

$$A^{(e)} = \begin{bmatrix} [A_{11}^{(e)}] & [A_{12}^{(e)}] \\ [A_{21}^{(e)}] & [A_{22}^{(e)}] \end{bmatrix} \tag{47}$$

biçimindedir. (47) ifadesinde

$$[A_{11}^{(e)}] = \int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[ \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial N_{kl}}{\partial x_2} + \left( \frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial N_{kl}}{\partial x_1} - \Omega^2 N_{ij} N_{kl} \right] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \tag{48}$$

$$[A_{12}^{(e)}] = \int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[ \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial N_{kl}}{\partial x_2} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial N_{kl}}{\partial x_1} \right] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \tag{49}$$

$$[A_{21}^{(e)}] = \int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[ \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial N_{kl}}{\partial x_1} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial N_{kl}}{\partial x_2} \right] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \tag{50}$$

$$\left[ A_{22}^{(e)} \right] = \int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[ \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial N_{kl}}{\partial x_1} + \left( \frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial N_{kl}}{\partial x_2} - \Omega^2 N_{ij} N_{kl} \right] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \quad (51)$$

biçimindedir. (48)-(51) denklemlerinde  $i, j, k, l = 1, \dots, M$  olmaktadır. (46) denkleminde  $u$  vektörü

$$u = \{ [a_k] \quad [b_k] \}^T \quad (52)$$

yapısında olup düğüm noktalarında  $x_1$  ve  $x_2$  istikametindeki yerdeğiştirmeleri vermektedir.  $f$  vektörü ise

$$f = \left\{ \frac{P_0}{\mu} N_{ij} \Big|_{\substack{\hat{x}_1=0 \\ \hat{x}_2=1}} \right\}^T \quad (53)$$

biçiminde hesaplanır. Daha sonra yerdeğiştirmeler vasıtasıyla gerilmeler

$$\sigma = DBu \quad (54)$$

denklemleri ile elde edilir. (54) denklemindeki  $D$  matrisi

$$D = \frac{2}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \quad (55)$$

ve  $B$  matrisi

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_9}{\partial r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_9}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_9}{\partial s} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_9}{\partial r} \end{bmatrix}_{3 \times 18} \quad (56)$$

biçimindedir.

## SONUÇ

Bu çalışmada rijit yarı-düzlem üzerine oturmuş öngerilmeli şerit plağın zorlanmış titreşim probleminin üç boyutlu doğrusallaştırılmış elastodinamik teorisi çerçevesinde matematik formülasyonu verilmiştir. Bu formülasyona karşılık gelen sınır-değer probleminin varyasyonel ifadesi oluşturulmuş ve bu ifadede yer alan fonksiyonelin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden -virtüel iş prensibi esasında uygun denklem ve sınır koşullarının elde edilmesi ispat edilmiştir. Daha sonra bu koşullardan yararlanılarak şerit levhanın kapsadığı bölge sonlu elemanlara bölünerek problemin sonlu eleman ( SE ) modellenmesi yapılmıştır. Elde edilen SE modeli uygun malzeme

sabitleri girilerek somut örnekler için kullanılarak analitik çözümü mümkün olmayan bu problem için yaklaşık çözümlere ulaşmaya imkan verecektir (örneğin, şerit plak ile yarıdüzlem arasındaki gerilmelerin hesaplanmasında).

## KAYNAKLAR

- AKBAROV, S.D., OZISIK, M., 2003, The influence of third-order elastic constants to the generalized Rayleigh wave dispersion in a pre-stressed stratified half-plane, *International Journal of Engineering Science*, 41, 2047-2061.
- CHERKAEV, A., CHERKAEV, E., 2003, Calculus of Variations and applications, Lecture Notes.
- GUZ, A.N., 1986a, Elastic Waves in a Body with Initial Stresses, I.General Theory, Naukova Dumka, Kiev.
- GUZ, A.N., 1986b, Elastic Waves in a Body with Initial Stresses, II.Propagation Laws, Naukova Dumka, Kiev.
- GUZ, A.N., 2002, Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, *International Applied Mechanics*, 38, 35-78.
- MATNIAK, S.V., 2003, On Rolling rigid cylinder along a band with initial stresses, *International Applied Mechanics*, 39(3), 81-87.
- OZISIK, M., AKBAROV, S.D., 2003, Rayleigh wave propagation in a half-plane covered with a prestressed layer under complete and incomplete interfacial contact, *Mechanics of Composite Materials*, 39, 177-182.
- RUDNITSKY, V.B., DIKBTARYARUK, N.N., 2002, Initially stressed elastic strip strengthened by elastic stringers, *International Applied Mechanics*, 38, 81-87.